

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Э. И. ГРИГОЛЮК, В. В. КАБАНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1978

Устойчивость оболочек. Григолюк Э. И., Кабанов В. В., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 360 стр.

Книга отражает современную теорию и практику расчета устойчивости тонких оболочек. Систематически изложены нелинейная и линейная теории оболочек и методы исследования их на устойчивость. Обобщены и систематизированы известные теоретические и экспериментальные исследования. В отличие от известных книг, содержащих или классическую, или нелинейную трактовку устойчивости оболочек, излагаются результаты, связанные с учетом действительного характера исходного напряженного состояния оболочек. Исследования этого рода имеют наибольшую практическую ценность. В книге приведены алгоритмы расчета устойчивости оболочек на ЭВМ и результаты исследований, доведенные до формул и графиков, удобных для практического использования.

Книга предназначена для лиц, занимающихся проектированием и расчетами, научных сотрудников и аспирантов.

Табл. 7, илл. 189, библи. 418.

ИНБ № 33
НЕ БОЛЕЕ 11 КНИГ В
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

**БИБЛИОТЕКА
КОЛОХВА
ОСКОРКА**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Перечень основных обозначений	15

ЧАСТЬ I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Глава I. Элементы теории поверхностей	17
§ 1. Внутренняя геометрия поверхности	17
§ 2. Внешняя геометрия поверхности	19
§ 3. Деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена	23
§ 4. Деформации поверхности	25
Глава II. Основные уравнения нелинейной теории оболочек	30
§ 1. Усилия и моменты	30
§ 2. Уравнения равновесия	31
§ 3. Гипотезы Кирхгофа — Лява. Перемещения и деформации	35
§ 4. Соотношения упругости	40
§ 5. Граничные условия	41
Глава III. Техническая теория оболочек	45
§ 1. Основные уравнения	45
§ 2. Уравнения в смешанной форме	46
§ 3. Пологие оболочки	48
§ 4. Вариационные уравнения	49
§ 5. Пологие оболочки с начальными неправильностями	50
§ 6. Нелинейный краевой эффект	51
Глава IV. Уравнения устойчивости оболочек	52
§ 1. Общие уравнения устойчивости	54
§ 2. Исследование и упрощение уравнений	57
1. Местная потеря устойчивости	57
2. Общая потеря устойчивости	62
§ 3. Вариационные уравнения	65

ЧАСТЬ II

КРУГОВАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

Глава V. Основные уравнения	66
§ 1. Исходное состояние оболочки	66
§ 2. Уравнения устойчивости	72

✓ Глава VI. Методы исследования устойчивости оболочек	77
§ 1. Однородные исходные состояния	77
§ 2. Неоднородные исходные состояния	78
§ 3. Алгоритм исследования устойчивости оболочек методом Бубнова	83
§ 4. Конечно-разностный алгоритм	88
✓ Глава VII. Осевое сжатие	98
§ 1. Линейная задача. Классическая постановка	98
§ 2. Влияние граничных условий	101
§ 3. Влияние моментности исходного состояния	104
1. Осесимметричная деформация	104
2. Неосесимметричная форма потери устойчивости	111
§ 4. Влияние упругости опор	112
§ 5. Оболочка, подкрепленная по краям упругими кольцами	114
§ 6. Нелинейная задача	119
§ 7. Учет начальных несовершенств	121
§ 8. Эксперименты	126
1. Обоснование нижней критической нагрузки	128
2. Обоснование верхней критической нагрузки	129
§ 9. Эмпирические зависимости	133
✓ Глава VIII. Внешнее давление	137
§ 1. Линейная задача. Классическая постановка	137
§ 2. Влияние граничных условий	140
§ 3. Влияние моментности исходного состояния	144
§ 4. Нелинейная задача	146
§ 5. Учет начальных несовершенств	147
§ 6. Эксперименты	148
Глава IX. Кручение	155
§ 1. Линейная задача. Классическая постановка	155
§ 2. Влияние граничных условий	159
§ 3. Нелинейная задача. Учет начальных несовершенств	161
§ 4. Эксперименты	162
Глава X. Влияние внутреннего давления	165
§ 1. Осевое сжатие. Линейная задача	166
§ 2. Нелинейная задача	168
§ 3. Эксперименты	169
§ 4. Кручение. Линейная задача	171
§ 5. Эксперименты	172
Глава XI. Комбинированное нагружение	173
§ 1. Взаимодействие нагрузок	173
✓ § 2. Внешнее давление с растяжением, сжатием	175
§ 3. Кручение с растяжением, сжатием	186
§ 4. Кручение и внешнее давление	188
§ 5. Случаи трех нагрузок	190
Глава XII. Изгиб моментом оболочки с внутренним давлением	190
§ 1. Чистый изгиб	192
1. Задача Дубяги — Кармана — Бразье	192
2. Линейная задача. Классическая постановка	193
3. Учет сплющивания	194
4. Нелинейная задача	195
5. Эксперименты	195

§ 2. Влияние внутреннего давления	197
1. Линейная задача	197
2. Нелинейная задача	198
3. Эксперименты	199
Глава XIII. Поперечный изгиб	199
§ 1. Изгиб силой. Линейная задача	199
§ 2. Приближенные оценки. Эксперименты	202
§ 3. Влияние внутреннего давления	204
Глава XIV. Неоднородное по длине осевое сжатие	206
§ 1. Линейная задача. Классическая постановка	206
§ 2. Влияние граничных условий и моментности исходного состояния	209
Глава XV. Неоднородное по окружности осевое сжатие	213
§ 1. Линейная задача. Классическая постановка	213
§ 2. Нелинейная задача	218
§ 3. Приближенные оценки. Эксперименты	218
Глава XVI. Неоднородное по длине внешнее давление	222
§ 1. Случай безмоментного исходного состояния	222
§ 2. Влияние неоднородности давления	224
§ 3. Линейно изменяющееся давление	227
§ 4. Давление, приложенное на части оболочки	229
§ 5. Эксперименты	230
Глава XVII. Неоднородное по окружности внешнее давление	231
§ 1. Плавно меняющееся давление. Безмоментное состояние	231
§ 2. Влияние моментности исходного состояния	234
Глава XVIII. Неоднородное по длине кручение	236
§ 1. Линейная задача. Безмоментное состояние	236
§ 2. Влияние неоднородности кручения	238
Глава XIX. Локальные нагрузки	240
§ 1. Радиальные усилия, приложенные по окружности	240
§ 2. Краевые радиальные усилия и моменты	241
Глава XX. Совместное действие однородных и неоднородных нагрузок	242
§ 1. Осевое сжатие, краевые моменты и радиальные усилия, приложенные по окружности	242
§ 2. Изгиб моментом и внешнее давление	244
§ 3. Изгиб, внешнее давление и кручение	247
§ 4. Изгиб силой с кручением и внутренним давлением	249
Глава XXI. Температурная устойчивость оболочек	253
§ 1. Равномерный нагрев. Безмоментное состояние	254
§ 2. Оболочка с краевыми шпангоутами	255
§ 3. Оболочка, подкрепленная шпангоутами	257
§ 4. Неравномерный нагрев по длине	258
§ 5. Неравномерный нагрев по окружности	260
§ 6. Равномерный нагрев, сжатие и боковое давление	265
§ 7. Неравномерный по длине нагрев и сжатие	270

ЧАСТЬ III

НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Глава XXII. Оболочки вращения	272
§ 1. Основные уравнения	272
§ 2. Внешнее давление	274
§ 3. Растягивающие усилия	274
§ 4. Эллиптические оболочки	276
Глава XXIII. Круговая коническая оболочка	277
§ 1. Уравнения	277
§ 2. Осевое сжатие	279
§ 3. Внешнее давление	283
§ 4. Кручение	287
§ 5. Кручение и осевое сжатие	288
Глава XXIV. Сферическая оболочка	289
§ 1. Уравнения	289
§ 2. Внешнее давление. Полная сфера	290
§ 3. Полусфера. Влияние граничных условий и моментности исходного состояния	291
§ 4. Локальные осесимметричные нагрузки	292
§ 5. Устойчивость при нагреве	293
§ 6. Комбинированное нагружение	294
§ 7. Влияние начальных неправильностей	297
§ 8. Пологие сферические панели	297
§ 9. Сферическая пологая панель под действием сосредоточенной силы	299

ЧАСТЬ IV

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Глава XXV. Уравнения	301
§ 1. Основные понятия	301
§ 2. Уравнения оболочек по теории малых упруго-пластических деформаций. Теория течения	303
Глава XXVI. Круговая цилиндрическая оболочка	310
§ 1. Уравнения	310
§ 2. Осевое сжатие	312
§ 3. Внешнее давление	317
§ 4. Кручение	321
§ 5. Внешнее давление и сжатие, растяжение	325
§ 6. Сжатие и внутреннее давление	327
Глава XXVII. Нецилиндрические оболочки	328
§ 1. Оболочки вращения	328
§ 2. Коническая оболочка	332
Литература	333

К главе I. Теория поверхностей (333). К главе II. Уравнения нелинейной теории оболочек (333). К главе III. Техническая теория оболочек (334). К главе IV. Уравнения устойчивости оболочек (334). К главе V. Уравнения круговой цилиндрической оболочки (335). К главе VI. Методы исследования устойчивости оболочек (335). К главе VII. Осевое сжа-

тие (337). К главе VIII. Внешнее давление (340). К главе IX. Кручение (342). К главе X. Влияние внутреннего давления (343). К главе XI. Комбинированное нагружение (344). К главе XII. Изгиб моментом (346). К главе XIII. Поперечный изгиб (346). К главам XIV, XV. Неоднородное сжатие (347). К главам XVI, XVII. Неоднородное внешнее давление (347). К главе XVIII. Неоднородное кручение (348). К главе XIX. Локальные нагрузки (348). К главе XX. Совместное действие однородных и неоднородных нагрузок (349). К главе XXI. Температурная устойчивость оболочек (349). К главе XXII. Оболочки вращения (351). К главе XXIII. Круговая коническая оболочка (351). К главе XXIV. Сферическая оболочка (352). К главе XXV. Уравнение устойчивости оболочек за пределом упругости (353). К главе XXVI. Круговая цилиндрическая оболочка (354). К главе XXVII. Нецилиндрические оболочки (355).

Именной указатель 356

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование устойчивости равновесия тонких оболочек — одна из важных проблем механики твердых деформируемых тел. Впервые явление потери устойчивости оболочек изучалось экспериментально Фёйербёрном [8.21] (1858) (внешнее давление), Лилли [7.38] (1908) и Маллоком [7.42] (1908) (осевое сжатие). Первые теоретические работы были выполнены Грасгофом [8.22] (1859), Брессом [8.16] (1859) и Брайаном [4.13] (1889). Интенсивно эта проблема стала разрабатываться с начала нашего века. Обзор исследований, доведенный до 1966 г., дан в работе [5.1]. Рост публикаций по годам иллюстрируется графиком рис. 0.1, взятым из этой работы. В настоящее время насчитывается огромное количество статей и книг, посвященных проблеме устойчивости оболочек. Однако количество публикаций не соответствует степени разработки проблемы, которая еще значительно отстает от запросов практики.

Первые фундаментальные результаты были получены Лоренцем [7.39] (1908—1911), С. П. Тимошенко [7.12] (1910—1914), Саутуэллом [8.29] (1913—1915) в линейной постановке на основе статического критерия Л. Эйлера [4.14] (1744). Согласно этому критерию критическая нагрузка системы определяется как наименьшая нагрузка, при которой наряду с исходной формой равновесия оказывается статически возможной смежная бесконечно близкая к ней форма равновесия. С математической точки зрения в этом методе задача определения критического состояния системы заключается в нахождении собственных чисел и соответствующих им векторов линейных дифференциальных уравнений. Собственные числа определяют критические нагрузки, собственные векторы — формы потери устойчивости. Зачастую бывает достаточно определить только первое собственное число и соответствующий ему вектор. Найденная таким образом нагрузка определяет момент разветвления форм равновесия и называется верхней критической нагрузкой.

В первых работах использовалась идеализированная расчетная схема. Оболочка считалась геометрически совершенной и идеально упругой, исходное состояние безмоментным. В основ-

ном рассматривались свободно опертые оболочки. Полагалось, что вплоть до момента потери устойчивости оболочка может свободно деформироваться в радиальном направлении. Такая, ставшая классической, постановка широко использовалась впоследствии.

Величина верхней критической нагрузки, полученная в этих работах, не подтвердилась первыми экспериментами. Наблюдаемые в экспериментах критические нагрузки, как правило, были значительно ниже классической. Все дальнейшее развитие теории устойчивости оболочек было направлено на выявление причин этого расхождения. Развитие шло по разным направлениям.

В 1934 г. Доннелл [7.23] обратил внимание на важность учета нелинейных членов в геометрических соотношениях. Основы геометрически нелинейной теории были заложены работой Маргерра [3.10] (1938), хотя идейные вопросы этой теории были обсуждены еще раньше в работах Навье (1833), С. П. Тимошенко (1925) и Бицено (1935) [5.1] по прощелкиванию стержней и сферического купола. Позднее Карман и Цзян [7.35] на основе уравнений Маргерра установили, что в закри- тической стадии нагрузка с ростом деформации падает. Такой результат был весьма неожиданным и противоречил известным фактам, полученным в решениях аналогичных задач для стержней и пластин, где нагрузка с ростом деформации непрерывно возрастала.

Резкое падение нагрузки после смены исходной невозмущенной формы равновесия свидетельствует о наличии несмежных изгибных форм равновесия при малых уровнях нагрузки и чрезвычайной чувствительности оболочки ко всякого рода возмущениям: начальным прогибам, несоблюдению граничных условий, динамическим эффектам окружающей среды и пр. При наличии этих возмущений оболочка скачком переходит от исходной формы равновесия к несмежным изгибным формам. Нагрузка, соответствующая перескоку от исходного состояния к несмежному, является действительной верхней критической нагрузкой. Величина ее определяется видом и мерой возмущений и в основном несовершенствами формы срединной поверхности.

У совершенных оболочек в идеальных условиях нагружения действительная и классическая верхние критические нагрузки

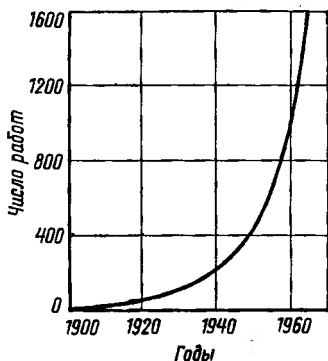


Рис. 0.1. Рост по годам числа публикаций по устойчивости круговых цилиндрических оболочек.

совпадают. Решение нелинейных задач заключается в изучении несмежных равновесных форм, т. е. в исследовании критического поведения оболочек. Обычная процедура исследования задач — построение кривых «нагрузка — прогиб» или «напряжение — деформация» для этих равновесных форм. Нагрузку, соответствующую нижней точке огибающей кривых, принято называть нижней критической нагрузкой.

Таким образом, нижняя критическая нагрузка определяется уровнем средних напряжений в оболочке, ниже которого не могут существовать другие равновесные формы, кроме исходной. Нижняя критическая нагрузка, найденная в первых решениях, лучше соответствовала эксперименту, чем классическая верхняя критическая нагрузка. В связи с этим появились рекомендации оценивать устойчивость оболочек по нижней критической нагрузке, а вместе с тем и большое количество решений нелинейных задач в указанной постановке.

Теория устойчивости на данном этапе в основном развивалась вширь: исследовались различные классы оболочек, разные виды нагрузок, метод же решения оставался стандартным. Задачи решались на основе канонизированных уравнений пологих оболочек. Функция прогиба аппроксимировалась тригонометрическим рядом. Обычно в ряде удерживалось малое количество членов. Этим оболочка как система с бесконечным числом степеней свободы заменялась системой с малым числом степеней свободы.

Положение несколько изменилось в связи с привлечением к исследованиям ЭЦВМ. Появилась возможность уточнять решения, увеличивая число степеней свободы оболочки. В результате в ряде работ [7.13, 7.41, 7.43, 7.50] было найдено, что нижняя критическая нагрузка уменьшается с увеличением числа членов, удерживаемых в разложении искомых функций. Величина ее для случая осевого сжатия оболочки составляет сотые доли величины верхней классической нагрузки, причем соответствующие ей прогибы имеют большую величину, при которой под сомнение ставится корректность применения исходных уравнений. Более того, в некоторых работах получены отрицательные значения нижней критической нагрузки. Эти, а также некоторые экспериментальные работы [7.56, 7.57], в которых было дано обоснование нелинейной теории, изменили прежнюю точку зрения на нижнюю критическую нагрузку как на характеристику устойчивости оболочек.

В связи с этим представляет интерес направление, связанное с исследованиями влияния начальных несовершенств оболочки на величину верхней критической нагрузки. В работе Доннелла и Вана [7.24] была развита нелинейная теория несовершенных оболочек. Совокупность всех возмущений оценивалась эквива-

лентным начальным прогибом, подобным ожидаемой форме потери устойчивости. Амплитуда начального прогиба определялась коэффициентом несовершенства и параметрами волнообразования, которые связывались с геометрическими параметрами и способом изготовления оболочек. Оказалось, что верхняя критическая нагрузка сильно зависит от величины амплитуды начального прогиба.

Метод начальных несовершенств качественно улавливает наблюдаемые в эксперименте явления и в принципе позволяет путем подбора соответствующей амплитуды начального прогиба получить экспериментальную критическую нагрузку. Однако в выборе амплитуды начального прогиба имеется известная неопределенность, так как величина и форма начальных несовершенств носят случайный характер. Для использования такого подхода на практике необходим статистический анализ результатов экспериментов по изучению начальных несовершенств.

Нелинейная трактовка поведения оболочки при деформировании помогла глубже понять физику явления потери устойчивости. К сожалению, увлечение нелинейными задачами сопровождалось пренебрежением к развитию линейной теории. Лишь в последние годы наметился явный возврат к решениям задач устойчивости в линейной постановке. Опубликован ряд работ [7.8, 7.26, 7.28, 7.46, 7.47], в которых обсуждается влияние различных граничных условий. В этих работах, согласно классической постановке, исходное состояние считается безмоментным. При таком подходе удовлетворительного, с точки зрения согласования с экспериментом, результата получить не удалось. Только в случае осевого сжатия свободно опертых круговых цилиндрических оболочек, когда на краях принималось равным нулю касательное усилие, критическая нагрузка получилась примерно вдвое меньше классической. Но подобный вариант граничных условий в чистом виде в реальных закреплениях оболочек не встречается, так что отмеченный эффект может в какой-то мере проявляться только за счет податливости закреплений.

В работах [6.24, 10.6, 10.7] анализировалось влияние граничных условий, реализуемых в эксперименте. В этом случае исследовалась устойчивость моментного исходного состояния, обусловленного краевыми эффектами. Учет моментности исходного состояния в случае осевого сжатия круговой цилиндрической оболочки приводит к снижению верхней критической нагрузки по сравнению с классической на 15—20%. Величина этого снижения недостаточна, чтобы объяснить расхождение теории и эксперимента.

Дальнейших успехов в этом вопросе, вероятно, следует ожидать от исследований устойчивости моментных форм равновесия на основе уравнений, полученных с учетом начальных

несовершенств. Однако при этом неизбежно снова возникают проблемы, связанные с неопределенностью задания формы и величины амплитуды начального прогиба. Начальные прогибы, совпадающие по форме с прогибами при потере устойчивости совершенной оболочки или с прогибами, которые получает оболочка в закритической стадии, приводят к существенному снижению критической нагрузки. При других видах начального прогиба возможно даже повышение критической нагрузки.

Существующую на протяжении многих лет дисгармонию теории и эксперимента можно объяснить не только несовершенством теории, но и отсутствием в достаточной мере аккуратных экспериментов, удовлетворяющих условиям, на которых основаны теоретические решения: совершенная форма оболочки, неограниченная упругость материала, идеальное закрепление и нагружение и т. д. Обычно из-за технологических причин (местные дефекты, овальность, разностенность, искривление образующих, непараллельность торцов оболочек и пр.) и причин методических (несоблюдение условий закрепления, неравномерность распределения нагрузки по оболочке, неточность замеров, высокий уровень нагрузки, приводящий к появлению текучести у краев и пр.) эти условия не реализуются полностью. Большое значение имеют механические свойства моделей, характеристики испытательных машин, способ приложения нагрузки (например, давление воздухом или маслом), постоянство нагрузки по величине и направлению в момент выпучивания и ряд других условий. Имеются единичные эксперименты, в которых уделяется должное внимание значению этих факторов.

В истории развития экспериментального направления исследования устойчивости оболочек схематично можно выделить два периода.

Первый период простирается от экспериментов Фёйербёрна [8.21] 1858 г. примерно до 1950 г. За этот период были проведены эксперименты качественного характера, которые установили сам факт явления потери устойчивости и привлекли к нему внимание теоретиков, а также эксперименты по проверке линейных и нелинейных теоретических решений. Характерной чертой большинства этих экспериментов является то, что упомянутые выше факторы в них практически не контролировались. В основном регистрировалась величина наибольшей нагрузки, воспринимаемой оболочкой, и форма потери устойчивости (визуально). Технология изготовления моделей оболочек была несовершенной, применялись вальцовка, сварка, клепка. Материалы, из которых изготавливались оболочки, имели недостаточно высокие упругие свойства, так что в закритической стадии обычно появлялись неупругие деформации. Понятно, что для проверки теории устойчивости такие эксперименты могут использоваться только в гру-

бом приближении. Эти эксперименты больше подходят для статистической оценки устойчивости реальных конструкций оболочек, так как у них в соблюдении упомянутых условий также имеется некоторая неопределенность.

Второй период, начинающийся с 1950 г., характерен постановкой более качественных экспериментов. Большое внимание уделяется совершенству геометрии оболочек. Отрабатываются методы изготовления моделей оболочек: точение, центробежное литье, электроосаждение, напыление в вакууме. Применяются пластиковые материалы с хорошими упругими свойствами. Используется современная регистрирующая аппаратура: осциллографы, полярископы, скоростные фотокамеры и пр. Все это позволило, с одной стороны, исключить большинство нежелательных факторов и приблизить постановку эксперимента к теоретической, с другой стороны, — увеличить число контролируемых в процессе испытаний параметров.

Применение упругих материалов позволило получить экспериментально диаграммы деформирования оболочек при относительно больших деформациях и тем самым установить величину нижней критической нагрузки, которая в случае осевого сжатия согласуется с теоретической [7.56]. Другие эксперименты [7.52, 7.53] дали неплохое соответствие с классической линейной теорией и по форме потери устойчивости, и по величине критической нагрузки. Таким образом, в задаче об осевом сжатии круговой цилиндрической оболочки впервые в истории развития теории устойчивости оболочек намечился обнадеживающий prospect.

Сейчас уже достаточно ясно, что хорошего согласования эксперимента с расчетом можно достичь и в рамках линейной теории. При этом классическая линейная теория должна быть пересмотрена с учетом ряда факторов. Основные из них — граничные условия, неоднородность, моментность и нелинейность исходного состояния, неоднородность строения оболочек, текучесть материала, начальные геометрические и физические несовершенства. Именно такой постановке в книге и уделено основное внимание.

Книга состоит из четырех частей. В первой части излагаются основы общей теории оболочек. Выведены уравнения нелинейной теории с учетом деформаций сдвига срединной поверхности. Рассмотрены различные варианты упрощения уравнений. Обсуждены критерии устойчивости, выведены, проанализированы и упрощены уравнения устойчивости.

Вторая часть, самая большая по объему, посвящена круговой цилиндрической оболочке. В ней приведены основные уравнения и обсуждены методы их решения. Изложены два алгоритма исследования устойчивости оболочек с учетом момент-

ности и нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния. Алгоритмы позволяют исследовать широкий круг задач устойчивости оболочек при неоднородных напряженно-деформированных состояниях, различных граничных условиях и нагрузках. Далее проанализированы решения различных задач устойчивости оболочек под действием однородных нагрузок. Рассмотрены случаи действия неоднородных нагрузок и температуры.

В третьей части рассмотрены оболочки нецилиндрического класса: конические, сферические, оболочки вращения.

В последней, четвертой части, изложены некоторые вопросы расчета оболочек на устойчивость за пределом упругости.

При отборе материала для книги авторы стремились отразить современную теорию и практику расчета оболочек на устойчивость. Основное внимание уделено пересмотру классической схемы решения задач с учетом граничных условий, моментности и неоднородности исходного напряженно-деформированного состояния. Вопросы нелинейной теории устойчивости обсуждаются конспективно, в основном приводятся конечные результаты решений. Большое внимание уделено экспериментальным результатам и полуэмпирическим зависимостям. Результаты большинства экспериментов систематизированы в виде обобщенных графиков с использованием параметров подобия. Для практики эти графики представляют наибольшую ценность.

В перечень литературы включены не все известные авторам работы. В основном собраны работы, которые оказались необходимыми для изложения материала: первые работы, затем работы, в которых содержатся дальнейшие уточнения решений, и, наконец, работы, в которых получены наиболее ценные для практики результаты. Более полный список работ, доведенный до 1965 г., дан в обзорах авторов [5.1, 27.2]. Перечень литературы построен по главам.

Авторы выражают благодарность проф. О. И. Теребушко и канд. физ.-матем. наук Л. Г. Корнейчуку за многие ценные советы, высказанные ими в процессе подготовки рукописи книги к изданию.

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- α, β, n — безразмерные криволинейные координаты;
 A, B — параметры Ляме срединной поверхности;
 x, y, z — продольная, дуговая координаты и координата по нормали к срединной поверхности цилиндрической оболочки, размерные гауссовы или декартовы координаты;
 u, v, w — смещения точек поверхности в направлении координат α, β, n или x, y, z ;
 $\xi, \xi_1, \varphi, \eta, s$ — безразмерные координаты: $\xi = x/R, \xi_1 = x/L, \varphi = y/R, \eta = x/\theta, s = y/\theta$;
 k_1, k_2 — главные кривизны срединной поверхности;
 R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности;
 h — толщина оболочки;
 R, L — радиус и длина круговой цилиндрической оболочки;
 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ — компоненты мембранной деформации срединной поверхности;
 $\varepsilon_1, \gamma, \varepsilon_2$ — линейные компоненты мембранной деформации срединной поверхности;
 χ_1, χ_2, τ — компоненты изгибной деформации срединной поверхности;
 T_1, T_2, S — погонные нормальные и сдвигающее усилия;
 M_1, M_2, H — погонные изгибающие и крутящий моменты;
 Q_1, Q_2 — погонные поперечные силы;
 ν, E, G — коэффициент Пуассона, модуль Юнга и модуль сдвига материала;
 E_s, E_k — секущий и касательный модули;
 $\sigma_{пч}, \sigma_p, \sigma_s$ — пределы прочности, пропорциональности и текучести;
 σ_i, ε_i — интенсивности напряжений и деформаций;
 t — изменение температуры оболочки;
 α_t — коэффициент линейного температурного расширения;
 n, m — номера гармоник в рядах Фурье или числа волн по окружности и полуволн по длине цилиндрической оболочки;
 $\lambda = m\pi R/L, \lambda_1 = \pi R/L$;
 T_v, T_p, S_v, t_v — верхние критические значения осевого и окружного усилий, усилия сдвига, изменения температуры;

$$T_v = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad T_p = \frac{0,856}{(1-\nu^2)^{3/4}} Eh \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{3/2},$$

$$S_v = \frac{0,74}{(1-\nu^2)^{5/8}} Eh \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}, \quad t_v = \frac{h}{\alpha_t R \sqrt{3(1-\nu^2)}};$$
 P — внутреннее боковое давление;
 q — внешнее боковое давление;
 N — погонное осевое усилие сжатия;
 Q, M, M_k — внешние поперечная сила, изгибающий и крутящий моменты;

$w_0, a_0 h$ — начальный прогиб и его амплитуда;

σ, τ — осевое нормальное и касательное критические напряжения;

σ_i, σ_d — амплитуды нормальных и критических напряжений при изгибе моментом и силой;

τ_d — амплитуда касательного напряжения при изгибе силой;

$k_c, k_b, k_d, k_t, k_\tau, \dots$ — относительные критические напряжения для отдельного нагружения:

$$k_c = \frac{\sigma}{\sigma_b}, \quad k_b = \frac{\sigma_t}{\sigma_b}, \quad k_d = \frac{\sigma_d}{\sigma_b}, \quad k_t = \frac{\tau}{\tau_b}, \quad k_\tau = \frac{\tau_d}{\tau_b}, \quad k_q = \frac{q}{q_b};$$

$R_c, R_b, R_d, \dots$ — то же для комбинированного нагружения;

∇^2 — оператор Лапласа;

∇^4, ∇^{-4} — бигармонический и обратный ему операторы:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla^{-4} \nabla^4 = 1;$$

c, b, k, d, P, q, n, v — в индексах означают соответственно сжатие, изгиб, кручение, изгиб силой, внутреннее и внешнее давления, нижнее и верхнее значения;

$\alpha, \beta, x, y, \eta, s$ — в индексах означают дифференцирование ($u_x, v_{yy}, T_{1\eta}, \dots$ — производные);

«0» — индекс сверху означает исходное состояние, внизу — начальное;

«~» — индекс порядка величин;

$a \times b$ — векторное произведение;

$$k_2 = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_2}, \quad k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad \sigma_b = \frac{T_b}{h}, \quad \tau_b = \frac{S_b}{h}, \quad R_p = \frac{P}{q_b}, \quad q_b = \frac{T_p}{R},$$

$$q_2 = \frac{qR}{T_b}, \quad \tau_2 = \frac{\tau}{\sigma_b}, \quad \bar{P} = \frac{PR^2}{Eh^2}, \quad K = \frac{Eh}{1-v^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}, \quad C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{12(1-v^2)}} \frac{h}{R}, \quad \theta = \frac{\sqrt{Rh}}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} = R\sqrt{C} = R\alpha_0, \quad \alpha_0 = k_2\theta = \sqrt{C},$$

$$\beta = n\alpha_0 = \frac{n}{\sqrt{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}, \quad \eta_m = \frac{L}{\theta} = \pi\chi, \quad \gamma_p = p\alpha_0 = \frac{p}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}},$$

$$\chi = \sqrt[4]{12(1-v^2)} \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{R}{h}}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{h}{R}} = \chi C, \quad Z_m = \sqrt{Z},$$

$$Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1-v^2} = \frac{\chi^2 \pi^2}{\sqrt{12}} \approx 2,86\chi^2, \quad \varepsilon = \frac{Rh}{L^2}, \quad \varepsilon_1 = C^2, \quad Z_1 = \frac{\eta}{\sqrt[4]{12}} — пара-$$

метры геометрии, внешних нагрузок, жесткости и напряженного состояния оболочек.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Внутренняя геометрия поверхности

Рассмотрим произвольную гладкую поверхность и систему декартовых координат x, y, z (рис. 1.1). Положение любой точки M на поверхности можно определить радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы. С другой стороны, эту же точку можно задать двумя координатами α, β , отсчитываемыми от заданной на поверхности точки по некоторым линиям. В качестве координат α, β могут быть взяты отрезки самих линий, углы, соответствующие этим отрезкам, декартовы координаты и т. д. Координата α отсчитывается вдоль α -линий ($\beta = \text{const}$), а координата β — вдоль β -линий ($\alpha = \text{const}$). Координаты α, β называются криволинейными (гауссовыми). Они связаны с декартовыми координатами:

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta), & y &= y(\alpha, \beta), \\ z &= z(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (1.2)$$

так что можно написать

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta). \quad (1.3)$$

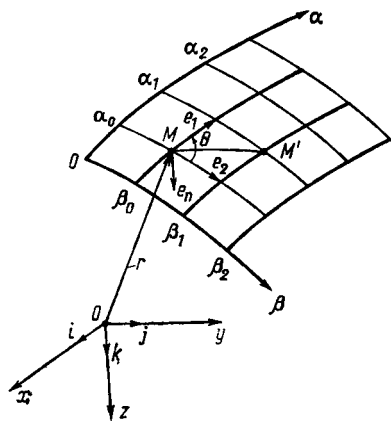


Рис. 1.1. Системы декартовых и криволинейных координат.

Производные $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta$ вектора $\mathbf{r}$ по α, β называются основными, или координатными векторами поверхности. Эти векторы касательны к поверхности в точке M и направлены вдоль линий $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$ соответственно. Это очевидно, так как при частном дифференцировании мы изменяем одну из координат,

перемещая конец вектора по линии. Обычно линии $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ совмещают с линиями главных кривизн поверхности. При этом векторы r_α , r_β будут взаимно перпендикулярными, а система криволинейных координат ортогональной.

Длины основных векторов

$$A = |r_\alpha|, \quad B = |r_\beta| \quad (1.4)$$

называются параметрами Ляме. Здесь $| \quad |$ — знак абсолютной величины. Вектор нормали к поверхности определяется векторным произведением

$$n = r_\alpha \times r_\beta. \quad (1.5)$$

Единичные векторы:

$$e_1 = \frac{r_\alpha}{A}, \quad e_2 = \frac{r_\beta}{B}, \quad e_n = \frac{n}{|n|} = e_1 \times e_2. \quad (1.6)$$

Орты e_1 , e_2 , e_n образуют правый трехгранник. Из определения скалярного произведения имеем

$$e_1 e_2 = \cos \theta,$$

где θ — угол между координатными линиями.

Предполагается, что $\theta > 0$. Дифференциал радиуса-вектора r

$$dr = r_\alpha d\alpha + r_\beta d\beta \quad (1.7)$$

равен главной части дуги MM' , соединяющей точки $M(\alpha, \beta)$ и $M'(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ поверхности. Квадрат длины этого вектора (скалярное произведение вектора самого на себя)

$$I = dr^2 = ds^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2 \quad (1.8)$$

равен квадрату дифференциала дуги MM' и носит название первой квадратичной формы поверхности, а величины

$$E = A^2 = r_\alpha r_\alpha, \quad F = AB \cos \theta = r_\alpha r_\beta, \quad G = B^2 = r_\beta r_\beta \quad (1.9)$$

называются коэффициентами этой формы.

Первая квадратичная форма играет огромную роль в теории поверхностей. Она определяет так называемую внутреннюю геометрию поверхности. При заданных коэффициентах E , F , G , не имея больше никаких сведений о поверхности (форма, уравнение и т. д.), можно находить длины кривых на поверхности, углы между ними (точнее, между касательными к кривым) и площади участков поверхности. Действительно, первая квадратичная форма уже дает дифференциал, т. е. главную линейную часть дуги MM' . Точную длину дуги можно получить интегрированием.

Согласно (1.8), имеем

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \theta = \frac{\omega}{\sqrt{EG}}, \quad \omega = (EG - F^2)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Выражение $\omega^2 = n^2$ называется дискриминантом первой квадратичной формы. Это выражение, как и сама квадратичная форма, положительно при всех значениях α, β , исключая нулевые.

С помощью (1.10) единичный вектор нормали можно записать в виде

$$e_n = \frac{n}{\omega} = \frac{n}{AB \sin \theta}. \quad (1.11)$$

Если вычислять дифференциал дуги вдоль линии α , то $d\beta = 0$, а из (1.8) находим

$$ds^2 = E d\alpha^2. \quad (1.12)$$

Отсюда видно, что

$$ds = A d\alpha. \quad (1.13)$$

Аналогично, вычисляя ds вдоль линии β , получаем

$$ds = B d\beta. \quad (1.14)$$

§ 2. Внешняя геометрия поверхности

Первая квадратичная форма, определяя внутреннюю геометрию поверхности, не позволяет судить о форме самой поверхности. Формы поверхности могут быть различными при одной и

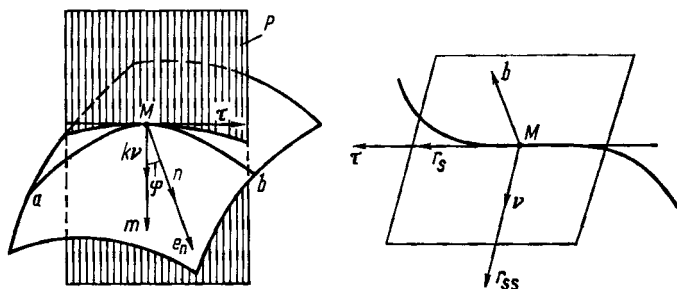


Рис. 1.2. Координатные векторы в точке M кривой и поверхности.

той же первой квадратичной форме. Такие формы можно получить изгибанием поверхности без изменения ее внутренней геометрии, так называемым изометрическим преобразованием поверхностей. При изометрическом преобразовании поверхность ведет себя как абсолютно гибкая и нерастяжимая среда. Для изучения кривизны линий поверхности необходимо привлекать понятие второй квадратичной формы.

Возьмем на поверхности произвольную линию ab . В точке M построим касательную к этой линии (рис. 1.2). Пусть r —

радиус-вектор точки M , а s — длина дуги по линии ab . Орт касательной τ равен производной r_s . Вторая производная r_{ss} дает кривизну к кривой и называется вектором кривизны. Величина кривизны в точке равна пределу отношения угла поворота касательной на бесконечно малой дуге к длине этой дуги.

Плоскость, в которой лежит вектор кривизны, называется соприкасающейся плоскостью кривой ab . Нормаль m к кривой ab , лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью. Поскольку $dr^2 = ds^2$, имеем

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 1, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 2r_s r_{ss} = 0, \quad (2.1)$$

т. е. вектор r_{ss} перпендикулярен касательной, а следовательно, направлен вдоль орта v главной нормали m . Орт v направлен в сторону вогнутости кривой. В результате получается известная формула Серре — Френе

$$r_{ss} = kv = \frac{v}{\rho}, \quad (2.2)$$

где ρ — радиус кривизны кривой.

Нормаль к кривой, перпендикулярная к главной нормали, называется бинормалью, а плоскость, содержащая главную нормаль и бинормаль, — нормальной плоскостью. Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль, — спрямляющая плоскость. Трехгранник, образованный касательной, главной нормалью и бинормалью, называется сопровождающим трехгранником кривой. Единичные векторы τ , v , b — главные векторы кривой. Они определяются выражениями:

$$\tau = r_s, \quad v = \rho r_{ss}, \quad b = \tau \times v. \quad (2.3)$$

В дополнение к (2.2) имеют место еще две формулы Серре — Френе:

$$v_s = -k\tau + \chi b, \quad b_s = -\chi v. \quad (2.4)$$

Здесь χ — кручение кривой. По абсолютной величине кручение равно пределу отношения угла поворота бинормали на малой дуге к длине этой дуги.

Переписывая (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{v}{\rho} = r_{ss} &= (r_\alpha \alpha_s + r_\beta \beta_s)_s = \\ &= r_{\alpha\alpha} \alpha_s^2 + 2r_{\alpha\beta} \alpha_s \beta_s + r_{\beta\beta} \beta_s^2 + r_\alpha \alpha_{ss} + r_\beta \beta_{ss}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

умножая скалярно обе части равенства на e_n и учитывая, что

$$e_n v = \cos \varphi,$$

где φ — угол между e_n и v , получаем

$$k_n = \frac{\cos \varphi}{\rho} = r_{\alpha\alpha} e_n \alpha_s^2 + 2r_{\alpha\beta} e_n \alpha_s \beta_s + r_{\beta\beta} e_n \beta_s^2 = \frac{\Pi}{I}, \quad (2.6)$$

где I — первая квадратичная форма, II — вторая квадратичная форма

$$II = L d\alpha^2 + 2M d\alpha d\beta + N d\beta^2, \quad (2.7)$$

а L , M и N — ее коэффициенты:

$$L = r_{\alpha\alpha}e_n, \quad M = r_{\alpha\beta}e_n, \quad N = r_{\beta\beta}e_n. \quad (2.8)$$

Эти коэффициенты можно представить еще в таком виде:

$$L = -r_{\alpha}e_{n\alpha}, \quad M = -r_{\beta}e_{n\alpha} = -r_{\alpha}e_{n\beta}, \quad N = -r_{\beta}e_{n\beta}, \quad (2.8')$$

если учесть, что

$$e_n r_{\alpha} \equiv 0, \quad e_n r_{\beta} \equiv 0,$$

и, следовательно,

$$e_n r_{\alpha\alpha} + e_{n\alpha} r_{\alpha} \equiv e_n r_{\alpha\beta} + e_{n\beta} r_{\alpha} \equiv e_{n\alpha} r_{\beta} + e_n r_{\alpha\beta} = e_n r_{\beta\beta} + e_{n\beta} r_{\beta} = 0.$$

Если в (2.8) подставить значение e_n согласно (1.6), то можно получить еще одно выражение для коэффициентов второй квадратичной формы (в числителях стоят смешанные произведения векторов)

$$L = \frac{r_{\alpha\alpha} r_{\alpha} \times r_{\beta}}{\omega}, \quad M = \frac{r_{\alpha\beta} r_{\alpha} \times r_{\beta}}{\omega}, \quad N = \frac{r_{\beta\beta} r_{\alpha} \times r_{\beta}}{\omega}. \quad (2.9)$$

Величина

$$k_n = \frac{\cos \varphi}{\rho} = r_{ss} e_n = k v e_n = \frac{1}{R_n}, \quad (2.10)$$

равная проекции вектора кривизны на нормаль к поверхности, называется нормальной кривизной поверхности. Она определяет кривизну линии пересечения поверхности нормальными плоскостями (плоскости, содержащие нормаль n). Величина R_n называется радиусом кривизны поверхности. В отличие от существенно положительного радиуса кривой ρ , радиус R_n может быть и отрицательным, если направление нормали n выбрано в сторону выпуклости кривой. Формула (2.10) позволяет находить кривизну любых линий на поверхности по известной величине нормальной кривизны.

Если кривая ab совпадает с координатной линией α , то, учитывая, что при этом $d\beta = 0$, получаем нормальную кривизну линии α

$$k_n = k_1 = \frac{L}{E}. \quad (2.11)$$

Аналогично в случае совпадения кривой ab с линией β получаем нормальную кривизну линии β

$$k_2 = \frac{N}{G}. \quad (2.12)$$

Таким образом, коэффициенты L , N второй квадратичной формы характеризуют нормальные кривизны координатных линий. Коэффициент M характеризует кручение поверхности.

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм связаны тремя уравнениями:

$$\begin{aligned} L_\beta - M_\alpha - G_{\alpha\beta}^\alpha L + (G_{\alpha\alpha}^\alpha - G_{\alpha\beta}^\beta) M + G_{\alpha\alpha}^\beta N &= 0, \\ N_\alpha - M_\beta - G_{\alpha\beta}^\beta N + (G_{\beta\beta}^\beta - G_{\alpha\beta}^\alpha) M + G_{\beta\beta}^\alpha L &= 0, \\ \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= -\frac{1}{\omega} \left[\theta_{\alpha\beta} + \left(\frac{B_\alpha - A_\beta \cos \theta}{A \sin \theta} \right)_\alpha + \left(\frac{A_\beta - B_\alpha \cos \theta}{B \sin \theta} \right)_\beta \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $G_{ij}^k = G_{ji}^k$ ($i, j, k = \alpha, \beta$) — символы Кристоффеля второго рода. Символы Кристоффеля выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha}^\alpha &= \omega^{-2} [AB^2 A_\alpha + A^2 B A_\beta \cos \theta - AB \cos \theta (AB \cos \theta)_\alpha], \\ G_{\alpha\alpha}^\beta &= \omega^{-2} [A^2 (AB \cos \theta)_\alpha - A^2 B \cos \theta A_\alpha - A^3 A_\beta], \\ G_{\alpha\beta}^\alpha &= \omega^{-2} AB^2 (A_\beta - B_\alpha \cos \theta), \\ G_{\alpha\beta}^\beta &= \omega^{-2} A^2 B (B_\alpha - A_\beta \cos \theta), \\ G_{\beta\beta}^\alpha &= \omega^{-2} [B^2 (AB \cos \theta)_\beta - B^2 A \cos \theta B_\beta - B^3 B_\alpha], \\ G_{\beta\beta}^\beta &= \omega^{-2} [BA^2 B_\beta + B^2 AB_\alpha \cos \theta - AB \cos \theta (AB \cos \theta)_\beta]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Первые два уравнения носят название уравнений Кодацци, третье уравнение — уравнение Гаусса. Задание шести коэффициентов первой и второй квадратичных форм, удовлетворяющих уравнениям (2.13), определяет поверхность с точностью до положения ее в пространстве.

Поскольку через заданную точку можно провести бесчисленное множество нормальных сечений, кривизна нормальных сечений будет изменяться при изменении направления сечения. Экстремальные значения нормальных кривизн называются главными кривизнами k_1 , k_2 , а соответствующие им направления — главными направлениями.

Линии на поверхности, касательные к которым в каждой точке совпадают с главными направлениями, называются линиями кривизны. Обычно такие линии выбирают в качестве координатных. Линии кривизны перпендикулярны, так что система криволинейных координат ортогональна. В теории поверхностей доказывается, что всякую поверхность можно отнести к линиям кривизны. В этом случае $M = 0$.

Произведение главных кривизн

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{A^2 B^2 \sin^2 \theta} \quad (2.15)$$

называется гауссовой кривизной поверхности. Величина ее, как видно из (2.15), равна отношению дискриминантов первой и второй квадратичных форм. В зависимости от знака гауссовой кривизны различают эллиптические ($K > 0$), параболические ($K = 0$) и гиперболические ($K < 0$) точки поверхности.

Поверхности, у которых все точки эллиптические, называются поверхностями положительной гауссовой кривизны (сфера, эллипсоид); поверхности, у которых все точки параболические, — поверхностями нулевой гауссовой кривизны (цилиндр, конус), и поверхности, имеющие только гиперболические точки, — поверхностями отрицательной гауссовой кривизны.

Полусумма главных кривизн

$$K_c = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{\omega^2} (2FM - EN - GL) \quad (2.16)$$

называется средней кривизной.

§ 3. Деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена

Любой вектор, отнесенный к данной системе координат, может быть представлен в виде разложения по ортам основных векторов

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_n \mathbf{e}_n, \quad (3.1)$$

где r_1, r_2, r_n — составляющие вектора (скалярные величины). Следовательно, дифференцирование векторов сводится к дифференцированию ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n$, или основных векторов $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta, \mathbf{n}$. Это дифференцирование выполняется по формулам Гаусса — Вейнгартена:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha\alpha} &= G_{\alpha\alpha}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + G_{\alpha\alpha}^\beta \mathbf{r}_\beta + L \mathbf{e}_n = G_{\alpha\alpha}^\alpha A \mathbf{e}_1 + G_{\alpha\alpha}^\beta B \mathbf{e}_2 + L \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{r}_{\alpha\beta} &= G_{\alpha\beta}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + G_{\alpha\beta}^\beta \mathbf{r}_\beta + M \mathbf{e}_n = G_{\alpha\beta}^\alpha A \mathbf{e}_1 + G_{\alpha\beta}^\beta B \mathbf{e}_2 + M \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{r}_{\beta\alpha} &= G_{\beta\alpha}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + G_{\beta\alpha}^\beta \mathbf{r}_\beta + M \mathbf{e}_n = G_{\beta\alpha}^\alpha A \mathbf{e}_1 + G_{\beta\alpha}^\beta B \mathbf{e}_2 + M \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{r}_{\beta\beta} &= G_{\beta\beta}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + G_{\beta\beta}^\beta \mathbf{r}_\beta + N \mathbf{e}_n = G_{\beta\beta}^\alpha A \mathbf{e}_1 + G_{\beta\beta}^\beta B \mathbf{e}_2 + N \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}_{n\alpha} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\left(-\frac{L}{A} + \frac{M}{B} \cos \theta \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{L}{A} \cos \theta - \frac{M}{B} \right) \mathbf{e}_2 \right], \\ \mathbf{e}_{n\beta} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\left(\frac{N}{B} \cos \theta - \frac{M}{A} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{M}{A} \cos \theta - \frac{N}{B} \right) \mathbf{e}_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Формулы Гаусса можно переписать в виде, удобном для дифференцирования единичных векторов. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha\alpha} &= (\mathbf{e}_1 A)_\alpha = \mathbf{e}_{1\alpha} A + A_\alpha \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{r}_{\alpha\beta} &= (\mathbf{e}_1 A)_\beta = \mathbf{e}_{1\beta} A + A_\beta \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{r}_{\beta\alpha} = (\mathbf{e}_2 B)_\alpha = \mathbf{e}_{2\alpha} B + B_\alpha \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{r}_{\beta\beta} &= (\mathbf{e}_2 B)_\beta = \mathbf{e}_{2\beta} B + B_\beta \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

получаем

$$\begin{aligned} e_{1\alpha} &= \left(G_{\alpha\alpha}^{\alpha} - \frac{A_{\alpha}}{A}\right) e_1 + G_{\alpha\alpha}^{\beta} \frac{B}{A} e_2 + \frac{L}{A} e_n, \\ e_{1\beta} &= \left(G_{\alpha\beta}^{\alpha} - \frac{A_{\beta}}{A}\right) e_1 + G_{\alpha\beta}^{\beta} \frac{B}{A} e_2 + \frac{M}{A} e_n, \\ e_{2\alpha} &= G_{\beta\alpha}^{\alpha} \frac{A}{B} e_1 + \left(G_{\beta\alpha}^{\beta} - \frac{B_{\alpha}}{B}\right) e_2 + \frac{M}{B} e_n, \\ e_{2\beta} &= G_{\beta\beta}^{\alpha} \frac{A}{B} e_1 + \left(G_{\beta\beta}^{\beta} - \frac{B_{\beta}}{B}\right) e_2 + \frac{N}{B} e_n. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом $e_{1\beta} = e_{2\alpha}$, $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$. Деривационные формулы (3.2), (3.4) играют большую роль в теории поверхностей. Они позволяют любую производную вектора представить в виде разложения по ортам основных векторов.

Если система координат совпадает с линиями кривизны ($\theta = \pi/2$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$, $\omega = AB$, $M = 0$), то имеем символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha}^{\alpha} &= \frac{A_{\alpha}}{A}, \quad G_{\alpha\alpha}^{\beta} = -A_{\beta} \frac{A}{B^2}, \quad G_{\alpha}^{\beta} = \frac{B_{\alpha}}{B}, \\ G_{\alpha\beta}^{\alpha} &= \frac{A_{\beta}}{A}, \quad G_{\beta\beta}^{\alpha} = -B_{\alpha} \frac{B}{A^2}, \quad G_{\beta\beta}^{\beta} = \frac{B_{\beta}}{B}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

уравнения Кодацци и Гаусса:

$$\begin{aligned} (Ak_1)_{\beta} &= A_{\beta} k_2, \quad (Bk_2)_{\alpha} = B_{\alpha} k_1, \\ ABk_1 k_2 &= -\left(\frac{B_{\alpha}}{A}\right)_{\alpha} - \left(\frac{A_{\beta}}{B}\right)_{\beta}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена:

$$\begin{aligned} e_{1\alpha} &= -\frac{A_{\beta}}{B} e_2 + Ak_1 e_n, \quad e_{2\beta} = -\frac{B_{\alpha}}{A} e_1 + Bk_2 e_n, \\ e_{2\alpha} &= \frac{A_{\beta}}{B} e_1, \quad e_{1\beta} = \frac{B_{\alpha}}{A} e_2, \\ e_{n\alpha} &= -Ak_1 e_1, \quad e_{n\beta} = -Bk_2 e_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Выпишем произведения ортов, которые нам потребуются в дальнейшем:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= e_2^2 = e_n^2 = 1, \quad e_1 e_2 = e_1 e_n = e_2 e_n = 0, \\ e_1 \times e_1 &= e_2 \times e_2 = e_n \times e_n = 0, \\ e_1 \times e_2 &= e_n, \quad e_2 \times e_n = e_1, \quad e_n \times e_1 = e_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

§ 4. Деформации поверхности

Рассмотрим поверхность, отнесенную к линиям кривизны. Допустим, что под действием приложенных к поверхности сил ее точки смещаются на u , v , w в направлении недеформированных осей (оси с ортами e_1 , e_2 , e_n соответственно). Радиус-вектор деформированной поверхности

$$\tilde{r} = r + u, \quad (4.1)$$

где

$$u = ue_1 + ve_2 + we_n \quad (4.2)$$

— вектор смещений. Поскольку смещения являются функциями координат α , β , то и радиус-вектор можно считать функцией этих координат. В результате деформации ортогональная координатная сеть превратится в косоугольную.

Выпишем основные характеристики деформированной поверхности, используя результаты предыдущих параграфов.

Первая квадратичная форма

$$\tilde{I} = g_{11} d\alpha^2 + 2g_{12} d\alpha d\beta + g_{22} d\beta^2, \quad (4.3)$$

коэффициенты этой формы:

$$g_{11} = A_1^2 = \tilde{r}_\alpha^2, \quad g_{12} = A_1 B_1 \cos \theta = \tilde{r}_\alpha \tilde{r}_\beta, \quad g_{22} = B_1^2 = \tilde{r}_\beta^2, \quad (4.4)$$

основные векторы поверхности и их длины:

$$\tilde{r}_\alpha, \tilde{r}_\beta, \quad A_1 = |\tilde{r}_\alpha|, \quad B_1 = |\tilde{r}_\beta|, \quad (4.5)$$

единичные векторы трехгранника:

$$\tilde{e}_1 = \frac{\tilde{r}_\alpha}{A_1}, \quad \tilde{e}_2 = \frac{\tilde{r}_\beta}{B_1}, \quad \tilde{e}_n = \tilde{e}_1 \times \tilde{e}_2. \quad (4.6)$$

При записи выражения $\tilde{e}_n$ мы приняли

$$|\tilde{e}_1 \times \tilde{e}_2| = \sin \theta = \sin (\pi/2 - \gamma) = \cos \gamma \approx 1, \quad (4.7)$$

считая угол сдвига координатных линий $\tilde{e}_1 \tilde{e}_2 = \cos \theta \approx \gamma$ малой величиной, квадратами которого можно пренебречь по сравнению с единицей.

Вторая квадратичная форма

$$\tilde{II} = b_{11} d\alpha^2 + 2b_{12} d\alpha d\beta + b_{22} d\beta^2, \quad (4.8)$$

ее коэффициенты:

$$b_{11} = \tilde{r}_{\alpha\alpha} \tilde{e}_n = -\tilde{r}_\alpha \tilde{e}_{n\alpha}, \quad b_{12} = \tilde{r}_{\alpha\beta} \tilde{e}_n = -\tilde{r}_\alpha \tilde{e}_{n\beta} = -\tilde{r}_\beta \tilde{e}_{n\alpha}, \quad (4.9)$$

$$b_{22} = \tilde{r}_{\beta\beta} \tilde{e}_n = -\tilde{r}_\beta \tilde{e}_{n\beta},$$

кривизны координатных линий и кручение элемента:

$$\tilde{k}_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}, \quad \tilde{k}_{12} = \frac{b_{12}}{A_1 B_1}. \quad (4.10)$$

Дифференцируя радиус-вектор (4.1) и учитывая формулы (3.7) дифференцирования ортов, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_\alpha &= A[(1 + \varepsilon_1) \mathbf{e}_1 + \gamma_1 \mathbf{e}_2 - \omega_1 \mathbf{e}_n], \\ \tilde{\mathbf{r}}_\beta &= B[(1 + \varepsilon_2) \mathbf{e}_2 + \gamma_2 \mathbf{e}_1 - \omega_2 \mathbf{e}_n], \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{\alpha\alpha} &= \{[A(1 + \varepsilon_1)]_\alpha + A[(A_\beta/B) \gamma_1 + A k_1 \omega_1]\} \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + [(A \gamma_1)_\alpha - (A_\beta/B) A(1 + \varepsilon_1)] \mathbf{e}_2 - [(A \omega_1)_\alpha - A^2(1 + \varepsilon_1) k_1] \mathbf{e}_n, \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\beta\beta} &= \{[B(1 + \varepsilon_2)]_\beta + B[(B_\alpha/A) \gamma_2 + B k_2 \omega_2]\} \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + [(B \gamma_2)_\beta - (B_\alpha/A) B(1 + \varepsilon_2)] \mathbf{e}_1 - [(B \omega_2)_\beta - B^2(1 + \varepsilon_2) k_2] \mathbf{e}_n, \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\alpha\beta} &= \{[A(1 + \varepsilon_1)]_\beta - B_\alpha \gamma_1\} \mathbf{e}_1 + [(A \gamma_1)_\beta + B_\alpha(1 + \varepsilon_1) + \\ &\quad + A B k_2 \omega_1] \mathbf{e}_2 - [(A \omega_1)_\beta - A B k_2 \gamma_1] \mathbf{e}_n, \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\beta\alpha} &= \{[B(1 + \varepsilon_2)]_\alpha - A_\beta \gamma_2\} \mathbf{e}_2 + [(B \gamma_2)_\alpha + A_\beta(1 + \varepsilon_2) + \\ &\quad + A B k_1 \omega_2] \mathbf{e}_1 + [(B \omega_2)_\alpha - A B k_1 \gamma_2] \mathbf{e}_n. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u_\alpha}{A} + \frac{A_\beta}{AB} v - k_1 w, & \varepsilon_2 &= \frac{v_\beta}{B} + \frac{B_\alpha}{AB} u - k_2 w, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{A} \left(v_\alpha + \frac{A_\beta}{B} u \right), & \gamma_2 &= \frac{1}{B} \left(u_\beta - \frac{B_\alpha}{A} v \right), \\ \omega_1 &= -k_1 u - \frac{w_\alpha}{A}, & \omega_2 &= -k_2 v - \frac{w_\beta}{B}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Используя эти производные, из (4.4) — (4.10) находим

$$A_1 = A(1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} \approx A(1 + \varepsilon_{11}), \quad B_1 = B(1 + 2\varepsilon_{22})^{1/2} = B(1 + \varepsilon_{22}), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= A^2(1 + 2\varepsilon_{11}), & g_{12} &= A B \varepsilon_{12}, & g_{22} &= B^2(1 + 2\varepsilon_{22}), \\ \omega_0^2 &= g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = A^2 B^2 [(1 + 2\varepsilon_{11})(1 + 2\varepsilon_{22}) - \varepsilon_{12}^2], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \gamma_1 - \mathbf{e}_n \omega_1, & \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \gamma_2 - \mathbf{e}_n \omega_2, \\ \tilde{\mathbf{e}}_n &= \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_1 \omega_1 + \mathbf{e}_2 \omega_2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= A^2(\tilde{k}_1 + 2k_1 \varepsilon_1), & b_{12} &= A B \tilde{k}_{12}, \\ b_{22} &= B^2(\tilde{k}_2 + 2k_2 \varepsilon_2), & \tilde{k}_1 &= k_1 + \chi_1 - k_1 \varepsilon_1, \\ \tilde{k}_{12} &= \tau, & \tilde{k}_2 &= k_2 + \chi_2 - k_2 \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

При этом

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + 1/2(\varepsilon_1^2 + \gamma_1^2 + \omega_1^2), \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + 1/2(\varepsilon_2^2 + \gamma_2^2 + \omega_2^2), \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_{12} = \gamma + \varepsilon_1 \gamma_2 + \varepsilon_2 \gamma_1 + \omega_1 \omega_2,$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{B}{A} \left(\frac{v}{B} \right)_\alpha + \frac{A}{B} \left(\frac{u}{A} \right)_\beta,$$

$$\chi_1 = -\frac{\omega_{1\alpha}}{A} - \frac{A_\beta}{AB} \omega_2, \quad \chi_2 = -\frac{\omega_{2\beta}}{B} - \frac{B_\alpha}{AB} \omega_1, \quad (4.19)$$

$$\tau = -\frac{\omega_{\beta}}{B} + \frac{B_\alpha}{AB} \omega_2 + k_2 \gamma_1 = -\frac{\omega_{2\alpha}}{A} + \frac{A_\beta}{AB} \omega_1 + k_1 \gamma_2.$$

Разрешая (4.16) относительно e_1, e_2, e_n , получаем

$$e_1 = \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 \gamma_1 + \tilde{e}_n \omega_1, \quad e_2 = \tilde{e}_2 - \tilde{e}_1 \gamma_2 + \tilde{e}_n \omega_2, \quad (4.20)$$

$$e_n = \tilde{e}_n - \tilde{e}_1 \omega_1 - \tilde{e}_2 \omega_2.$$

При выводе выражений единичных векторов и коэффициентов второй квадратичной формы удерживались только члены первого порядка малости, члены второго порядка малости, содержащие произведение величин $\varepsilon_i, \gamma_i, \omega_i, \varepsilon_{ij}$, отбрасывались.

Поясним физический смысл введенных обозначений. Согласно (1.15), (1.8) длина элемента дуги координатной линии α равна

$$ds = A da = \sqrt{E} da. \quad (4.21)$$

После деформации длина элемента согласно (4.3)

$$d\tilde{s} = A_1 da = \sqrt{g_{11}} da. \quad (4.22)$$

Относительное удлинение элемента

$$\frac{d\tilde{s} - ds}{ds} = \frac{A_1}{A} - 1 = \sqrt{\frac{g_{11}}{E}} - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1 =$$

$$= \varepsilon_{11} (1 + 1/2\varepsilon_{11}) + \dots \approx \varepsilon_{11}. \quad (4.23)$$

Следовательно, ε_{11} — относительная деформация координатной линии α . Аналогично можно показать, что

$$\varepsilon_{22} \approx \varepsilon_{22} (1 + 1/2\varepsilon_{22}) + \dots = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}} - 1 = \frac{B_1}{B} - 1 = \sqrt{\frac{g_{22}}{G}} - 1 \quad (4.24)$$

— относительная деформация линии β . Далее, согласно (4.4), (4.14)

$$g_{12} = A_1 B_1 \cos \theta = AB \varepsilon_{12} = A_1 B_1 (\pi/2 - \theta). \quad (4.25)$$

Величина $\pi/2 - \theta \approx \cos \theta = \sin(\pi/2 - \theta)$ — угол сдвига координатных линий. Следовательно,

$$\varepsilon_{12} = \cos \theta (1 + \varepsilon_{11}) (1 + \varepsilon_{22}) = g_{12}/EG \quad (4.26)$$

характеризует деформацию сдвига.

Из (4.18) видно, что $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$ — линейные части $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$. При этом γ_1, γ_2 — составляющие сдвига, они характеризуют углы поворотов ортов e_1, e_2 вокруг оси с ортом e_n . Величины ω_1, ω_2 соответствуют углам поворотов орта e_n вокруг осей с ортами e_2, e_1 соответственно.

Как видно из (4.17), изменения кривизн координатных линий α, β равны

$$\tilde{k}_1 - k_1 = \chi_1 - k_1 \epsilon_1, \quad \tilde{k}_2 - k_2 = \chi_2 - k_2 \epsilon_2. \quad (4.27)$$

Следовательно, χ_1, χ_2 характеризуют изменения главных кривизн без учета влияния деформаций растяжения и сжатия. Величина τ соответствует закручиванию элемента, которое характеризуется изменением угла между линиями $\alpha, \alpha + d\alpha$ или $\beta, \beta + d\beta$, отнесенным к $d\beta, d\alpha$. Эта величина имеет размерность кривизны и называется кручением. Она определена без учета деформации сдвига. Учет деформаций $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$ при определении изменений кривизны и кручения не выходит [3.7] за пределы погрешности, вносимой исходными гипотезами. Поэтому в теории тонких оболочек вопрос использования выражений изменений кривизн и кручения решается с точки зрения простоты записи уравнений. Поскольку при записи единичных векторов члены второго порядка малости не учитывались, полученные выражения χ_i, τ соответствуют первому приближению, т. е. они записаны, как в линейной теории оболочек.

Шесть компонентов деформации, как видно из (4.13) — (4.19), выражаются через три перемещения, поэтому они зависят друг от друга. Эта зависимость дается уравнениями Кодацци и Гаусса:

$$\begin{aligned} (A\chi_1)_\beta - (B\tau)_\alpha - A_\beta \chi_2 + B_\alpha \tau + (B_\alpha \epsilon_{12} - A\epsilon_{11\beta})(k_1 + \chi_1) + \\ + [A_\beta \epsilon_{12} + B(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})_\alpha] \tau + \\ + [(B\epsilon_{12})_\alpha - A_\beta(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) - A\epsilon_{11\beta}](k_2 + \chi_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} (B\chi_2)_\alpha - (A\tau)_\beta - B_\alpha \chi_1 - A_\beta \tau + (A_\beta \epsilon_{12} - B\epsilon_{22\alpha})(k_2 + \chi_2) + \\ + [B_\alpha \epsilon_{12} + A(\epsilon_{22} - \epsilon_{11})_\beta] \tau + \\ + [(A\epsilon_{12})_\beta - B_\alpha(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) - B\epsilon_{22\alpha}](k_1 + \chi_1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB(k_1 \chi_2 + k_2 \chi_1 + \chi_2 \chi_1 - \tau^2) - \\ - \{B^{-1}[B_\alpha \epsilon_{12} + 1/2 B\epsilon_{12\alpha} + A_\beta \epsilon_{22} - (A\epsilon_{11})_\beta]\}_\beta - \\ - \{A^{-2}[A_\beta \epsilon_{12} + 1/2 A\epsilon_{12\beta} + B_\alpha \epsilon_{11} - (B\epsilon_{22})_\alpha]\}_\alpha = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Эти уравнения называются уравнениями неразрывности деформации поверхности. Они аналогичны уравнениям неразрывности Сен-Венана в теории упругости и служат условиями интегрируемости уравнений при нахождении перемещений по заданным компонентам деформации.

В заключение перепишем дериационные формулы (3.2), (4.12):

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{\alpha\alpha} &= \tilde{G}_{\alpha\alpha}^{\alpha}\tilde{r}_{\alpha} + \tilde{G}_{\alpha\alpha}^{\beta}\tilde{r}_{\beta} + b_{11}\tilde{e}_n = \tilde{G}_{\alpha\alpha}^{\alpha}A_1\tilde{e}_1 + \tilde{G}_{\alpha\alpha}^{\beta}B_1\tilde{e}_2 + b_{11}\tilde{e}_n, \\ \tilde{r}_{\alpha\beta} &= \tilde{G}_{\alpha\beta}^{\alpha}\tilde{r}_{\alpha} + \tilde{G}_{\alpha\beta}^{\beta}\tilde{r}_{\beta} + b_{12}\tilde{e}_n = \tilde{G}_{\alpha\beta}^{\alpha}A_1\tilde{e}_1 + \tilde{G}_{\alpha\beta}^{\beta}B_1\tilde{e}_2 + b_{12}\tilde{e}_n, \\ \tilde{r}_{\beta\alpha} &= \tilde{G}_{\beta\alpha}^{\alpha}\tilde{r}_{\alpha} + \tilde{G}_{\beta\alpha}^{\beta}\tilde{r}_{\beta} + b_{21}\tilde{e}_n = \tilde{G}_{\beta\alpha}^{\alpha}A_1\tilde{e}_1 + \tilde{G}_{\beta\alpha}^{\beta}B_1\tilde{e}_2 + b_{21}\tilde{e}_n, \\ \tilde{r}_{\beta\beta} &= \tilde{G}_{\beta\beta}^{\alpha}\tilde{r}_{\alpha} + \tilde{G}_{\beta\beta}^{\beta}\tilde{r}_{\beta} + b_{22}\tilde{e}_n = \tilde{G}_{\beta\beta}^{\alpha}A_1\tilde{e}_1 + \tilde{G}_{\beta\beta}^{\beta}B_1\tilde{e}_2 + b_{22}\tilde{e}_n,\end{aligned}\quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{1\alpha} &= \frac{A_{\beta}}{B}\gamma\tilde{e}_1 - \left[\frac{A_{\beta}}{B_1} - \frac{(B\gamma)_{\alpha}}{B}\right]\tilde{e}_2 + A(k_1 + \chi_1)\tilde{e}_n, \\ \tilde{e}_{1\beta} &= -\frac{B_{\alpha}}{A}\gamma\tilde{e}_1 + \left(\frac{B_{1\alpha}}{A_1} - \frac{A_{\beta}}{A}\gamma\right)\tilde{e}_2 + B\tau\tilde{e}_n, \\ \tilde{e}_{2\alpha} &= \left(\frac{A_{1\beta}}{B_1} - \frac{B_{\alpha}}{B}\gamma\right)\tilde{e}_1 - \frac{A_{\beta}}{B}\gamma\tilde{e}_2 + A\tau\tilde{e}_n, \\ \tilde{e}_{2\beta} &= \left(-\frac{B_{1\alpha}}{A_1} + \frac{(A\gamma)_{\beta}}{A}\right)\tilde{e}_1 + \frac{B_{\alpha}}{A}\gamma\tilde{e}_2 + B(k_2 + \chi_2)\tilde{e}_n, \\ \tilde{e}_{n\alpha} &= -\tilde{k}_1A_1\tilde{e}_1 - A(\tau - k_1\gamma)\tilde{e}_2, \\ \tilde{e}_{n\beta} &= -B(\tau - k_2\gamma)\tilde{e}_1 - B_1\tilde{k}_2\tilde{e}_2,\end{aligned}\quad (4.31)$$

где

$$A_1 = A(1 + \varepsilon_{11}) \approx A(1 + \varepsilon_1), \quad B_1 = B(1 + \varepsilon_{22}) \approx B(1 + \varepsilon_2).$$

В этих формулах удержаны только члены первого порядка малости. При их записи отбрасывались квадраты с произведениями малых величин τ , ε_i , γ , ω_i . При этом слагаемые типа τ/A_1 , γ/B_1 и т. д. преобразовывались по правилу $\gamma/B_1 = \gamma(1 - \varepsilon_2)/B \approx \gamma/B$, $\tau/A_1 \approx \tau(1 - \varepsilon_1)/A \approx \tau/A$, т. е. считалось, что ε_i — малые величины в сравнении с единицей. Как и раньше, было принято

$$\cos \theta \approx \gamma, \quad \sin \theta \approx 1.$$

Приведем еще значения символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\alpha\alpha}^{\alpha} &= \frac{A_{1\alpha}}{A_1} + \frac{A_{\beta}}{B}\gamma, & \tilde{G}_{\beta\beta}^{\beta} &= \frac{B_{1\beta}}{B_1} + \frac{B_{\alpha}}{A}\gamma, \\ \tilde{G}_{\alpha\alpha}^{\beta} &= -\frac{A_{1\beta}}{B_1^2}A_1 + \frac{A}{B^2}(B\gamma)_{\alpha}, & \tilde{G}_{\beta\beta}^{\alpha} &= -\frac{B_{1\alpha}}{A_1^2}B_1 + \frac{B}{A^2}(A\gamma)_{\beta}, \\ \tilde{G}_{\alpha\beta}^{\alpha} &= \frac{A_{1\beta}}{A_1} - \frac{B_{\alpha}}{A}\gamma, & \tilde{G}_{\alpha\beta}^{\beta} &= \frac{B_{1\alpha}}{B_1} - \frac{A_{\beta}}{B}\gamma\end{aligned}\quad (4.32)$$

и произведений ортов

$$\tilde{e}_1^2 = \tilde{e}_2^2 = \tilde{e}_n^2 = 1, \quad \tilde{e}_1\tilde{e}_2 = \gamma, \quad \tilde{e}_1\tilde{e}_n = \tilde{e}_2\tilde{e}_n = 0. \quad (4.33)$$

Г л а в а II

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Оболочками называются трехмерные тела, два размера которых значительно превышают третий. Этот третий размер называется толщиной оболочки. Обозначим толщину через h и будем считать ее постоянной. Материал оболочки изотропный и упругий. Поверхность оболочки, отстоящая на равных расстояниях от наружных поверхностей, называется срединной поверхностью.

Оболочка считается открытой, если ее срединная поверхность нигде не замкнута, и замкнутой в противном случае. Граничные сечения оболочки нормальными плоскостями — края оболочки. Для исследования поведения оболочки можно использовать результаты, полученные в первой главе, но при этом следует учесть толщину оболочки.

Будем считать оболочку тонкой, если ее относительная толщина h/R (R — меньший из главных радиусов кривизны) значительно меньше единицы. Обычно оболочки считают тонкими при $h/R \leq 0,05$, что соответствует допускаемой в технических расчетах погрешности в 5%. Часто теорию тонких оболочек применяют и при больших ($h/R \approx 1/5 \div 1/3$) относительных толщинах. Естественно, что при этом возрастает погрешность.

§ 1. Усилия и моменты

Отнесем срединную поверхность оболочки к линиям кривизны, задав ее векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta), \quad (1.1)$$

где α, β — гауссовы координаты.

Положение произвольной поверхности оболочки определяется вектором

$$\mathbf{r}^z = \mathbf{r} + z\mathbf{e}_n, \quad (1.2)$$

где z — координата точек по нормали к срединной поверхности ($-h/2 \leq z \leq h/2$).

Пусть оболочка нагружена краевыми нагрузками и следящей погонной поверхностной нагрузкой

$$\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q\mathbf{e}_n = \tilde{q}_1\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{q}_2\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{q}\tilde{\mathbf{e}}_n \quad (1.3)$$

с компонентами q_1, q_2, q по координатам α, β, n .

Вырежем из оболочки нормальными сечениями, проведенными в направлении линий кривизны, элемент $d\alpha \times d\beta$ (рис. 2.1).

В этих сечениях возникают нормальные σ_1 , σ_2 и касательные (в направлении линий α , β) напряжения σ_{12} . Интегрируя эти напряжения по толщине, переходим к погонным нормальным T_1 , T_2 и касательным S_1 , S_2 усилиям:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B d\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 B^z d\beta dz, \\ T_2 &= \frac{1}{A d\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 A^z d\alpha dz, \\ S_1 &= \frac{1}{B d\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} B^z d\beta dz, \\ S_2 &= \frac{1}{A d\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} A^z d\alpha dz. \end{aligned} \quad (1.4)$$

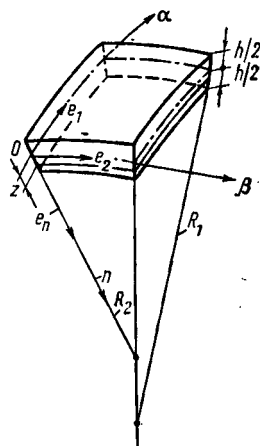


Рис. 21. Элемент оболочки в недеформированном состоянии.

Здесь A^z , B^z — значения параметров Ляме для слоя z . Аналогично вводятся погонные изгибающие M_i и крутящие H_i моменты

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{B d\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z B^z d\beta dz, & M_2 &= \frac{1}{A d\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z A^z d\alpha dz, \\ H_1 &= \frac{1}{B d\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} z B^z d\beta dz, & H_2 &= \frac{1}{A d\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} z A^z d\alpha dz. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем считать, что краевые нагрузки приложены к контуру срединной поверхности, и снесем, как это принято, поверхностную нагрузку (1.3) на срединную поверхность. Моменты от поверхностной нагрузки ввиду малости толщины оболочки учитывать не будем. Обозначим через Q_1 , Q_2 погонные поперечные силы.

§ 2. Уравнения равновесия

Введение погонных усилий и моментов позволяет вместо равновесия элементов оболочки рассмотреть равновесие элемента ее срединной поверхности. Положительные направления векторов усилий и моментов показаны на рис. 2.2. Векторы моментов ориентированы по правилу правого винта.

Уравнения равновесия элемента получим, приравняв нулю главный вектор и главный момент всех действующих на элемент сил. Запишем векторы усилий, действующих на площадках $\alpha = 0, \beta = 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_1 &= -(T_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + S_1 \tilde{\mathbf{e}}_2 + Q_1 \tilde{\mathbf{e}}_n) B_1 d\beta, \\ \tilde{\mathbf{R}}_2 &= -(T_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + S_2 \tilde{\mathbf{e}}_1 + Q_2 \tilde{\mathbf{e}}_n) A_1 d\alpha.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Векторы усилий на противоположных площадках элемента соответственно:

$$-(\tilde{\mathbf{R}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_{1\alpha} d\alpha), \quad -(\tilde{\mathbf{R}}_2 + \tilde{\mathbf{R}}_{2\beta} d\beta). \quad (2.2)$$

Знак минус здесь означает, что положительные направления

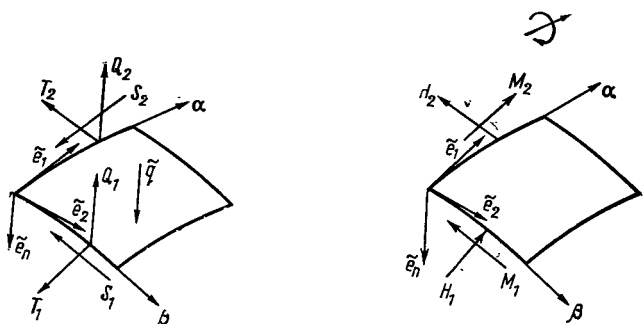


Рис. 2.2. Элемент срединной поверхности оболочки в деформированном состоянии.

векторов усилий и моментов обратны на противоположных сторонах элемента.

Вектор поверхностной нагрузки

$$\tilde{\mathbf{q}} = q A_1 B_1 d\alpha d\beta = (q_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + q_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + q \tilde{\mathbf{e}}_n) A_1 B_1 d\alpha d\beta. \quad (2.3)$$

Равенство нулю главного вектора приводит к первому уравнению равновесия элемента

$$\tilde{\mathbf{R}}_{1\alpha} d\alpha + \tilde{\mathbf{R}}_{2\beta} d\beta - \tilde{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.4)$$

Запишем векторы моментов относительно начала декартовой системы координат от усилий и моментов, действующих на площадках $\alpha = 0, \beta = 0$:

$$\tilde{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{G}_1 + \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{R}}_1, \quad \tilde{\mathbf{G}}_2 = \mathbf{G}_2 + \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{R}}_2, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1 &= (H_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 - M_1 \tilde{\mathbf{e}}_2) B_1 d\beta, \\ \mathbf{G}_2 &= (-H_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + M_2 \tilde{\mathbf{e}}_1) A_1 d\alpha.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Соответственно векторы от усилий на противоположных площадках:

$$-(\tilde{G}_1 + \tilde{G}_{1\alpha} da), \quad -(\tilde{G}_2 + \tilde{G}_{2\beta} d\beta). \quad (2.7)$$

Векторы момента поверхностной нагрузки

$$\tilde{m} = (\tilde{r} \times q) A_1 B_1 da d\beta = \tilde{r} \times \tilde{q}. \quad (2.8)$$

Равенство нулю главного момента дает второе уравнение равновесия элемента

$$\tilde{G}_{1\alpha} da + \tilde{G}_{2\beta} d\beta - \tilde{m} = 0. \quad (2.9)$$

Преобразуем это уравнение

$$(G_1 + \tilde{r} \times \tilde{R}_1)_\alpha da + (G_2 + \tilde{r} \times \tilde{R}_2)_\beta d\beta = (G_{1\alpha} + \tilde{r}_\alpha \times \tilde{R}_1) da + \\ + (G_{2\beta} + \tilde{r}_\beta \times \tilde{R}_2) d\beta + [(\tilde{r} \times \tilde{R}_{1\alpha}) da + (\tilde{r} \times \tilde{R}_{2\beta}) d\beta - \tilde{r} \times \tilde{q}] = 0.$$

Выражение в квадратной скобке равно нулю согласно первому уравнению равновесия. В результате получаем

$$(G_{1\alpha} + \tilde{r}_\alpha \times \tilde{R}_1) da + (G_{2\beta} + \tilde{r}_\beta \times \tilde{R}_2) d\beta = 0. \quad (2.10)$$

Векторные уравнения (2.4), (2.10) эквивалентны шести скалярным уравнениям. Используя деривационные формулы (4.31) и формулы векторных произведений ортов (4.33) гл. I, получаем, приравнявая выражения при ортах $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_n$, уравнения равновесия, отнесенные к деформированному состоянию оболочки:

$$(B_1 T_1)_\alpha + (A_1 S_2)_\beta - [B_{1\alpha} - (A\gamma)_\beta] T_2 + A_\beta T_1 \gamma + S_1 (A_{1\beta} - B_\alpha \gamma) - \\ - S_2 B_\alpha \gamma - AB_1 (k_1 + \chi_1) Q_1 - BA (\tau - k_2 \gamma) Q_2 + A_1 B_1 q_1 = 0, \\ (A_1 T_2)_\beta + (B_1 S_1)_\alpha - [A_{1\beta} - (B\gamma)_\alpha] T_1 + B_\alpha T_2 \gamma + S_2 (B_{1\alpha} - A_\beta \gamma) - \\ - S_1 A_\beta \gamma - BA_1 (k_2 + \chi_2) Q_2 - AB (\tau - k_1 \gamma) Q_1 + A_1 B_1 q_2 = 0, \\ (B_1 Q_1)_\alpha + (A_1 Q_2)_\beta + A_1 B (k_2 + \chi_2) T_2 + B_1 A (k_1 + \chi_1) T_1 + \\ + AB (S_1 + S_2) \tau + A_1 B_1 q = 0, \quad (2.11) \\ (A_1 M_2)_\beta + (B_1 H_1)_\alpha - A_1 B_1 Q_2 + H_2 [B_{1\alpha} - (A\gamma)_\beta] + \\ + A_\beta H_1 \gamma - M_2 B_\alpha \gamma - M_1 [A_{1\beta} - B_\alpha \gamma] - AB Q_1 \gamma = 0, \\ (B_1 M_1)_\alpha + (A_1 H_2)_\beta - A_1 B_1 Q_1 + H_1 [A_{1\beta} - (B\gamma)_\alpha] + \\ + B_\alpha H_2 \gamma - M_1 A_\beta \gamma - M_2 (B_{1\alpha} - A_\beta \gamma) - AB Q_2 \gamma = 0, \\ (S_1 - S_2) (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + H_2 (k_2 + \chi_2 + k_2 \varepsilon_1) - H_1 (k_1 + \chi_1 + k_1 \varepsilon_2) - \\ - G_2 \tau + G_1 \tau = 0.$$

Если при раскрытии уравнений (2.4), (2.10) выразить орты $\tilde{e}_i$ деформированной системы через орты e_i недеформированной

системы согласно (4.16) гл. I, то аналогично можно получить уравнения, отнесенные к недеформированному состоянию оболочки:

$$\begin{aligned}(BT_1^*)_\alpha + (AS_2^*)_\beta + S_1^* A_\beta - T_2^* B_\alpha - AB(k_1 Q_1^* - q_1^*) &= 0, \\(AT_2^*)_\beta + (BS_1^*)_\alpha + S_2^* B_\alpha - T_1^* A_\beta - AB(k_2 Q_2^* - q_2^*) &= 0, \\(BQ_1^*)_\alpha + (AQ_2^*)_\beta + AB(k_1 T_1^* + k_2 T_2^* + q^*) &= 0, \\(BM_1^*)_\alpha + (AH_2^*)_\beta + A_\beta H_1^* - B_\alpha M_2^* - ABQ_1^{**} &= 0, \\(AM_2^*)_\beta + (BH_1^*)_\alpha + B_\alpha H_2^* - A_\beta M_1^* - ABQ_2^{**} &= 0,\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}[(M_2 \omega_1 - H_2 \omega_2) A]_\beta + [(H_1 \omega_1 - M_1 \omega_2) B]_\alpha + M_2 AB k_2 \gamma_1 + \\+ M_1 AB k_1 \gamma_2 + H_2 A_1 B k_2 - B_1 A k_1 H_1 + \\+ AB(Q_1 \omega_2 - Q_2 \omega_1 + S_1 - S_2) = 0.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}T_1^* &= T_1(1 + \varepsilon_2) + S_1 \gamma_2 + Q_1 \omega_1, & T_2^* &= T_2(1 + \varepsilon_1) + S_2 \gamma_1 + Q_2 \omega_2, \\S_1^* &= S_1(1 + \varepsilon_2) + T_1 \gamma_1 + Q_1 \omega_2, & S_2^* &= S_2(1 + \varepsilon_1) + T_2 \gamma_2 + Q_2 \omega_1, \\M_1^* &= M_1(1 + \varepsilon_2) - H_1 \gamma_1, & M_2^* &= M_2(1 + \varepsilon_1) - H_2 \gamma_2, \\H_1^* &= H_1(1 + \varepsilon_2) - M_1 \gamma_2, & H_2^* &= H_2(1 + \varepsilon_1) - M_2 \gamma_1, \\Q_1^* &= Q_1(1 + \varepsilon_2) - T_1 \omega_1 - S_1 \omega_2, & Q_2^* &= Q_2(1 + \varepsilon_1) - T_2 \omega_2 - S_2 \omega_1, \\Q_1^{**} &= Q_1(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + Q_2 \gamma_2 + k_2(M_2 \omega_1 - H_2 \omega_2), \\Q_2^{**} &= Q_2(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + Q_1 \gamma_1 + k_1(M_1 \omega_2 - H_1 \omega_1), \\q_1^* &= q_1(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + q_2 \gamma_2 + q \omega_1, \\q_2^* &= q_2(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + q_1 \gamma_1 + q \omega_2, \\q^* &= q(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) - q_1 \omega_1 - q_2 \omega_2.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Уравнения (2.11), (2.12) выведены с учетом деформаций сдвига срединной поверхности. В этой мере они обобщают известные уравнения [2.7].

Нелинейные слагаемые в последних трех уравнениях систем (2.11), (2.12) отражают влияние мембранных деформаций на компоненты изгибной деформации. Это влияние, как известно, незначительно. Поскольку при определении компонент изгибной деформации мы ограничились линейным приближением (§ 4, гл. I), логично в последних трех уравнениях опустить все нелинейные слагаемые. По этой же причине в первых двух уравнениях в слагаемых, содержащих Q_i , можно заменить A_1 , B_1 , $\tau - k_1 \gamma$ на A , B , τ . В таком случае системы уравнений (2.11),

(2.12) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 (B_1 T_1)_\alpha + (A_1 S_2)_\beta - [B_{1\alpha} - (A\gamma)_\beta] T_2 + A_\beta T_1 \gamma - B_\alpha \gamma S_2 + \\
 + (A_{1\beta} - B_\alpha \gamma) S_1 - AB[(k_1 + \chi_1) Q_1 + \tau Q_2] + A_1 B_1 q_1 = 0, \\
 (A_1 T_2)_\beta + (B_1 S_1)_\alpha - [A_{1\beta} - (B\gamma)_\alpha] T_1 + B_\alpha T_2 \gamma - A_\beta \gamma S_1 + \\
 + (B_{1\alpha} - A_\beta \gamma) S_2 - AB[(k_2 + \chi_2) Q_2 + \tau Q_1] + A_1 B_1 q_2 = 0, \\
 (B_1 Q_1)_\alpha + (A_1 Q_2)_\beta + AB[(k_2 + \chi_2) T_2 + (k_1 + \chi_1) T_1 + \\
 + \tau(S_1 + S_2)] + A_1 B_1 q = 0, \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (BM_1)_\alpha + (AH_2)_\beta + A_\beta H_1 - B_\alpha M_2 - ABQ_1 = 0, \\
 (AM_2)_\beta + (BH_1)_\alpha + B_\alpha H_2 - A_\beta M_1 - ABQ_2 = 0, \\
 S_1 - S_2 + k_2 H_2 - k_1 H_1 = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (BT_1^*)_\alpha + (AS_2^*)_\beta + A_\beta S_1^* - B_\alpha T_2^* - AB(k_1 Q_1^* - q_1^*) = 0, \\
 (AT_2^*)_\beta + (BS_1^*)_\alpha + B_\alpha S_2^* - A_\beta T_1^* - AB(k_2 Q_2^* - q_2^*) = 0, \\
 (BQ_1^*)_\alpha + (AQ_2^*)_\beta + AB(k_1 T_1^* + k_2 T_2^* + q^*) = 0, \quad (2.15) \\
 (BM_1)_\alpha + (AH_2)_\beta + A_\beta H_1 - B_\alpha M_2 - ABQ_1 = 0, \\
 (AM_2)_\beta + (BH_1)_\alpha + B_\alpha H_2 - A_\beta M_1 - ABQ_2 = 0, \\
 S_1 - S_2 + k_2 H_2 - k_1 H_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения (2.14), (2.15) выведены для случая следящей поверхностной нагрузки. При консервативной (постоянной) по направлению нагрузке в уравнениях (2.15) исчезают все слагаемые, содержащие произведения компонент поверхностной нагрузки на углы поворота, а в уравнениях (2.14) они появляются с обратным знаком. К первым трем уравнениям (2.14) соответственно добавляются слагаемые:

$$-AB(q_2 \gamma_2 + q \omega_1), \quad -AB(q_1 \gamma_1 + q \omega_2), \quad AB(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2). \quad (2.16)$$

§ 3. Гипотезы Кирхгоффа — Лява. Перемещения и деформации

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, основаны на геометрических и статических соображениях. Однако этих соображений недостаточно для полного построения теории оболочек. При выводе соотношений, связывающих компоненты деформаций с перемещениями и усилия и моменты с компонентами деформаций, приходится принимать некоторые упрощающие подходы. Известно два таких подхода.

В первом из них, предложенном в теории пластин А. Коши*), перемещения и напряжения разлагаются в ряды по степеням нормальной координаты z . Оболочка при этом рассматривается как трехмерное тело. Удерживая в рядах достаточное количество членов, можно (при условии сходимости рядов) получить решение, близкое к точному. Во втором подходе, предложенном также в теории пластин Г. Кирхгофом**), принимаются гипотезы, аналогичные тем, которые используются в теории балок:

1) прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна недеформированной оболочки остаются прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности и не изменяют своей длины;

2) нормальные напряжения на площадках, параллельных площадкам срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими нормальными напряжениями.

Первая гипотеза имеет геометрический характер, вторая — статический. Теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа, была построена в основном А. Лявом [2.14], поэтому в теории оболочек гипотезы 1 и 2 принято называть гипотезами Кирхгофа — Лява. Иногда их называют гипотезой жесткой нормали или гипотезой сохранения нормали.

Гипотеза 1 используется только для записи зависимостей деформации оболочки от перемещений, гипотеза 2 — для записи зависимостей деформаций от напряжений. В первом случае предполагается, что в нормальных сечениях отсутствуют сдвиги ($\varepsilon_{1n} = 0$, $\varepsilon_{2n} = 0$) и что деформация нормали равна нулю ($\varepsilon_{nn} = 0$). Во втором случае допускается, что нормальное напряжение σ_{nn} незначительно влияет на деформации ε_{11} , ε_{22} , так что эти деформации выражаются через нормальные напряжения σ_{11} , σ_{22} . Таким образом, гипотезу 1 нельзя понимать в буквальном смысле, поскольку в действительности в оболочке имеют место поперечные сдвиги — поперечные силы Q_1 , Q_2 не равны нулю. Эти силы в силу принятой гипотезы нельзя выразить через деформации, они определяются статическим путем из условий равновесия.

Гипотезы Кирхгофа — Лява просты и физичны. Они позволяют свести трехмерную задачу деформирования оболочки к двумерной. Исследование поведения элемента оболочки в рамках этих гипотез сводится к исследованию поведения ее срединной поверхности. Погрешность от такого подхода [3.7] имеет

*) Cauchy A. Sur l'équilibre et mouvement d'une plaque solide. Exercice de mathématique, 1828, vol. 3, pp. 245—326.

**) Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1. Mechanik. Leipzig, Teubner, 1876; русск. перевод: Кирхгоф Г. Лекции по математической физике. Механика. М., Физматгиз, 1962.

порядок $O(h/R)$, так что для тонких оболочек эти гипотезы приемлемы.

Исследуем изменение перемещений по толщине оболочки, считая известным вектор смещения точки M срединной поверхности

$$u = ue_1 + ve_2 + we_n. \quad (3.1)$$

До деформации имеем:
радиус-вектор точки M

$$r = r(\alpha, \beta), \quad (3.2)$$

радиус-вектор точки M^* , расположенной на расстоянии z по нормали от точки M ,

$$r^z = r + ze_n. \quad (3.3)$$

Соответственно после деформации —

$$\tilde{r} = r + u, \quad \tilde{r}^z = r^z + u^z, \quad (3.4)$$

где

$$u^z = u(z)e_1 + v(z)e_2 + w(z)e_n \quad (3.5)$$

— вектор смещения точки M^* .

Согласно первой из гипотез Кирхгоффа — Лява

$$\tilde{r}^z = \tilde{r} + z\tilde{e}_n. \quad (3.6)$$

Следовательно,

$$u^z = \tilde{r}^z - r^z = \tilde{r} - r + z(\tilde{e}_n - e_n) = u + z(\tilde{e}_n - e_n). \quad (3.7)$$

Подставляя сюда значение $\tilde{e}_n$ согласно (4.16) гл. I, получаем

$$u^z = u + z(e_1\omega_1 + e_2\omega_2). \quad (3.8)$$

Отсюда, приравнявая выражения при одинаковых ортах, находим

$$u(z) = u + z\omega_1, \quad v(z) = v + z\omega_2, \quad w(z) = w. \quad (3.9)$$

Величины

$$\omega_1 = -\left(k_1u + \frac{w_a}{A}\right), \quad \omega_2 = -\left(k_2v + \frac{w_\beta}{B}\right) \quad (3.10)$$

представляют собой углы поворота орта e_n вокруг осей с ортами e_2, e_1 . Таким образом, первая гипотеза Кирхгоффа — Лява обуславливает линейное изменение перемещений по толщине оболочки. При этом в рассмотренном варианте нормальное перемещение не зависит от z .

Исследуем теперь деформации поверхности, параллельной срединной поверхности и отстоящей от нее на расстоянии z . Рассмотрим нормальное сечение $\beta = \text{const}$ (рис. 2.3). Если в этом

сечении радиус срединной поверхности R_1 , то радиус параллельной поверхности

$$R_1^z = R_1 - z.$$

Из подобия секторов Oab , Ocd имеем

$$\frac{ds}{ds^z} = \frac{R_1}{R_1 - z}, \quad ds^z = ds \left(1 - \frac{z}{R_1}\right),$$

где

$$ds = A d\alpha, \quad ds^z = A \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) d\alpha$$

— длины дуг срединной и параллельной поверхностей. Аналогично для линии β находим

$$ds = B d\beta, \quad ds^z = B \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) d\beta.$$

Следовательно, параметрами Ляме и радиусами кривизны параллельной поверхности служат величины:

$$A^z = A \left(1 - \frac{z}{R_1}\right), \quad B^z = B \left(1 - \frac{z}{R_2}\right),$$

$$R_1^z = R_1 - z, \quad R_2^z = R_2 - z. \quad (3.11)$$

Рис. 2.3. Сечение элемента оболочки.

Имея параметры Ляме, радиусы кривизны и выражения смещений (3.9), можно определить компоненты линейной деформации параллельной поверхности, подставляя в (4.18) гл. I $u(z)$, $v(z)$, A^z , B^z , R_1^z , R_2^z вместо u , v , A , B , R_1 , R_2 .

При этом следует учесть, что в силу условий Кодацци (3.6) гл. I можно записать

$$A_\alpha^z = A_\alpha - z(Ak_1)_\alpha = A_\alpha(1 - zk_2),$$

$$A_\beta^z = A_\beta - z(Ak_2)_\beta = A_\beta(1 - zk_2), \quad (3.12)$$

$$B_\alpha^z = B_\alpha(1 - zk_1), \quad B_\beta^z = B_\beta(1 - zk_1).$$

В результате получаем

$$\varepsilon_1^z = \frac{\varepsilon_1 - z\chi_1}{1 - k_1 z}, \quad \varepsilon_2^z = \frac{\varepsilon_2 - z\chi_2}{1 - k_2 z},$$

$$\gamma^z = \frac{\gamma - 2z\tau}{(1 - k_1 z)(1 - k_2 z)},$$

$$\gamma_1^z = \frac{\gamma_1 - z(\tau - k_1\gamma_2 + k_2\gamma_1)}{(1 - k_1 z)(1 - k_2 z)} = \gamma_1 - z(\tau - k_1\gamma), \quad (3.13)$$

$$\gamma_2^z = \frac{\gamma_2 - z(\tau - k_2\gamma_1 + k_1\gamma_2)}{(1 - k_1 z)(1 - k_2 z)} = \gamma_2 - z(\tau - k_2\gamma),$$

$$\omega_1^z = \omega_1, \quad \omega_2^z = \omega_2.$$

Поскольку оболочка тонкая, то можно принять $k_i z \ll 1$. В таком случае приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^z &= \varepsilon_1 - z(\chi_1 - k_1 \varepsilon_1), & \varepsilon_2^z &= \varepsilon_2 - z(\chi_2 - k_2 \varepsilon_2), \\ \gamma_1^z &= \gamma_1 - z(\tau - k_1 \gamma), & \gamma_2^z &= \gamma_2 - z(\tau - k_2 \gamma_1), \\ \gamma^z &= \gamma - 2z[\tau - (k_1 + k_2)\gamma], & \omega_1^z &= \omega_1, \quad \omega_2^z = \omega_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь согласно (4.13) — (4.19) гл. I

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u_\alpha}{A} + \frac{A_\beta}{AB} v - k_1 \omega, & \varepsilon_2 &= \frac{v_\beta}{B} + \frac{B_\alpha}{AB} u - k_2 \omega, \\ \gamma &= \frac{B}{A} \left(\frac{v}{B} \right)_\alpha + \frac{A}{B} \left(\frac{u}{A} \right)_\beta, \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \left(k_1 u + \frac{w_\alpha}{A} \right)_\alpha - \frac{A_\beta}{AB} \left(k_2 v + \frac{w_\beta}{B} \right), \\ \chi_2 &= \frac{1}{B} \left(k_2 v + \frac{w_\beta}{B} \right)_\beta - \frac{B_\alpha}{AB} \left(k_1 u + \frac{w_\alpha}{A} \right), \\ \tau &= \frac{1}{B} \left(k_1 u + \frac{w_\alpha}{A} \right)_\beta - \frac{B_\alpha}{AB} \left(k_2 v + \frac{w_\beta}{B} \right) + \frac{k_2}{B} \left(v_\alpha - \frac{A_\beta}{B} u \right) = \\ &= \frac{1}{A} \left(k_2 v + \frac{w_\beta}{B} \right)_\alpha - \frac{A_\beta}{AB} \left(k_1 u + \frac{w_\alpha}{A} \right) + \frac{k_1}{B} \left(u_\beta - \frac{B_\alpha}{A} v \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

— компоненты линейной деформации срединной поверхности.

Как видно из (3.14), эти компоненты определены без учета влияния мембранных деформаций ε_1 , ε_2 , γ на изменения кривизн и кручения. Более точные выражения изменений кривизн и кручения:

$$\chi_1 - k_1 \varepsilon_1, \quad \chi_2 - k_2 \varepsilon_2, \quad \tau - (k_1 + k_2) \gamma. \quad (3.16)$$

Из сравнения (3.13), (3.14) видно, что уточнение равносильно учету членов $k_i z$ в сравнении с единицей. Для тонких оболочек $k_i z \ll 1$, так что уточнение не выходит за рамки погрешности, вносимой гипотезами Кирхгоффа — Лява. Следовательно вместо (3.14) можно взять

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^z &= \varepsilon_1 - z\chi_1, & \varepsilon_2^z &= \varepsilon_2 - z\chi_2, \\ \gamma_1^z &= \gamma_1 - z\tau, & \gamma_2^z &= \gamma_2 - z\tau, & \gamma^z &= \gamma - 2z\tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Применение выражений (3.14), (3.15) или (3.17), (3.15), как уже отмечалось, должно рассматриваться с точки зрения простоты их использования в конкретных случаях.

Мембранные деформации ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} с учетом нелинейных членов определяются согласно (4.18) гл. I. Ограничиваясь линейным приближением в отношении изменений кривизн и кручения

и отбрасывая члены с квадратами, получаем

$$\varepsilon_{11}^z = \varepsilon_{11} - z\chi_1, \quad \varepsilon_{22}^z = \varepsilon_{22} - z\chi_2, \quad \varepsilon_{12}^z = \varepsilon_{12} - 2z\tau. \quad (3.18)$$

При этом деформации, а, следовательно, и напряжения, по толщине оболочки изменяются линейно. Выражения (3.18) с учетом нелинейных слагаемых в изменениях кривизн и кручения и квадратичных по z членов с небольшими отличиями даны в работах [2.7, 2.8, 2.11, 2.17].

§ 4. Соотношения упругости

Для упругого материала справедлив закон Гука. Используя гипотезы Кирхгоффа — Лява ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$), запишем выражения для напряжений в сечениях:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11}^z + \nu \varepsilon_{22}^z), & \sigma_{22} &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22}^z + \nu \varepsilon_{11}^z), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}^z. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь ν , E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала оболочки. Выражения (4.1) отвечают обобщенному плоскому напряженному состоянию. Подставляя (4.1) в (1.4), (1.5), находим

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(1 - k_2 z) dz, & T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22}(1 - k_1 z) dz, \\ S_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}(1 - k_2 z) dz, & S_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}(1 - k_1 z) dz, \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z (1 - k_2 z) dz, & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} z (1 - k_1 z) dz, \\ H_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} z (1 - k_2 z) dz, & H_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} z (1 - k_1 z) dz \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставляя в (4.1) выражения деформаций (3.18), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} - z(\chi_1 + \nu \chi_2)], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11} - z(\chi_2 + \nu \chi_1)], \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{12} - z\tau). \end{aligned} \quad (4.3)$$

С учетом этих выражений, считая $k_1 z \ll 1$, из (4.2) находим

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad T_2 = K(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ S_1 &= S_2 = S = K\nu_1 \varepsilon_{12}, \\ M_1 &= -D(\chi_1 + \nu \chi_2), \quad M_2 = -D(\chi_2 + \nu \chi_1), \\ H_1 &= H_2 = H = -D(1 - \nu)\tau, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$K = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \nu_1 = \frac{1 - \nu}{2} \quad (4.5)$$

— жесткости оболочки на растяжение и изгиб. Выражение усилий и моментов (4.4) соответствуют первому приближению Лява [2.14]. В. В. Новожилов и Л. И. Балабух предложили [3.7] другой вариант соотношений упругости, который отличается от (4.4) выражениями касательных усилий

$$S_1 = K\nu_1 \left(\varepsilon_{12} + \frac{h^2}{6R_2} \tau \right), \quad S_2 = K\nu_1 \left(\varepsilon_{12} + \frac{h^2}{6R_1} \tau \right). \quad (4.6)$$

Такой вид соотношений упругости в линейной теории позволяет удовлетворить шестому уравнению равновесия и теореме взаимности. Учитывая шестое уравнение равновесия, получаем вместо (4.6) одно выражение

$$S = K\nu_1 \varepsilon_{12}, \quad (4.7)$$

где

$$S = S_1 + k_2 H_2 \equiv S_2 + k_1 H_1. \quad (4.8)$$

Таким образом, снова приходим к соотношениям (4.4). Но при этом S имеет уже другой смысл.

§ 5. Граничные условия

Назовем граничным контуром Γ оболочки совокупность граничных точек срединной поверхности оболочки, а граничным сечением — поверхность, образованную совокупностью нормалей к срединной поверхности, проведенных через точки граничного контура. Введем систему ортогональных координат α_k, β_k, z , связанную с граничным контуром (рис. 2.4). Пусть орты $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{e}}_n$ этих координат образуют правосторонний триэдр. Обозначим через

$$\mathbf{R}'_k = \tilde{\mathbf{v}}T'_k + \tilde{\mathbf{t}}S'_k + \tilde{\mathbf{e}}_n Q'_k, \quad \mathbf{G}'_k = G'_k \tilde{\mathbf{t}} + H'_k \tilde{\mathbf{v}} \quad (5.1)$$

векторы погонных усилий и моментов на контуре, а через $T'_k, S'_k, Q'_k, G'_k, H'_k$ — их компоненты по осям с ортами $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{e}}_n$. Согласно известной из теории упругости формуле, выражающей напряжения на косой площадке через напряжения на

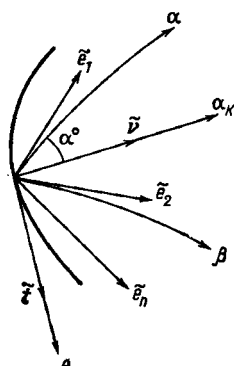
перпендикулярных к координатным линиям площадках, имеем

$$R'_k = R_{11}v_1 + R_{22}v_2, \quad G'_k = G_{11}v_1 + G_{22}v_2, \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= T_1 \tilde{e}_1 + S_1 \tilde{e}_2 + Q_1 \tilde{e}_n, & R_{22} &= T_2 \tilde{e}_2 + S_2 \tilde{e}_1 + Q_2 \tilde{e}_n, \\ G_{11} &= -H_1 \tilde{e}_1 + M_1 \tilde{e}_2, & G_{22} &= H_2 \tilde{e}_2 - M_2 \tilde{e}_1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

— векторы внутренних усилий и моментов, а v_i — проекции вектора нормали $\mathbf{v}$ на направления единичных $\tilde{e}_i$. Пусть ds — элемент длины дуги контура, а $\tilde{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор срединной поверхности. Тогда, считая деформации малыми и принимая [2.7] величины ds , A , B , t_i , v_i одинаковыми для деформированной и недеформированной поверхностей, получаем



$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}} &\approx \mathbf{t} = \tilde{\mathbf{r}}_s = \tilde{\mathbf{r}}_\alpha \alpha_s + \tilde{\mathbf{r}}_\beta \beta_s = \tilde{\mathbf{e}}_1 t_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 t_2 = \\ &= \tilde{\mathbf{e}}_2 v_1 - \tilde{\mathbf{e}}_1 v_2, \\ \tilde{\mathbf{v}} &\approx \mathbf{v} = \mathbf{t} \times \tilde{\mathbf{e}}_n = \tilde{\mathbf{e}}_1 t_2 - \tilde{\mathbf{e}}_2 t_1 = \\ &= \tilde{\mathbf{e}}_1 v_1 + \tilde{\mathbf{e}}_2 v_2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь t_1 , t_2 — проекции вектора $\mathbf{t}$ на направления $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$;

рис. 2.4. Система координат на граничном контуре

$$\begin{aligned} v_2 &= -A \frac{d\alpha}{ds} = -t_1 = \sin \alpha^\circ, \\ v_1 &= B \frac{d\beta}{ds} = t_2 = \cos \alpha^\circ, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где α° — угол между ортами $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\tilde{e}_1$. Обратные зависимости:

$$\tilde{e}_1 = t_2 \tilde{\mathbf{v}} + t_1 \tilde{\mathbf{t}} = v_1 \tilde{\mathbf{v}} - v_2 \tilde{\mathbf{t}}, \quad \tilde{e}_2 = -t_1 \tilde{\mathbf{v}} + t_2 \tilde{\mathbf{t}} = v_2 \tilde{\mathbf{v}} + v_1 \tilde{\mathbf{t}}. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.2) и сравнивая с (5.1), получаем

$$\begin{aligned} T'_k &= v_1^2 T_1 + v_1 v_2 S_1 + v_2^2 T_2 + v_1 v_2 S_2, \\ S'_k &= -v_1 v_2 T_1 + v_1^2 S_1 + v_1 v_2 T_2 - v_2^2 S_2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} Q'_k &= Q_1 v_1 + Q_2 v_2, \\ G'_k &= v_1 v_2 H_1 + v_2^2 M_2 + v_1^2 M_1 + v_1 v_2 H_2, \\ H'_k &= v_1 v_2 M_1 + v_2^2 H_2 - v_1^2 H_1 - v_1 v_2 M_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким образом, напряжения в граничном сечении заменены статически эквивалентными усилиями и моментами (5.7), (5.8). Если их приравнять заданным на контуре усилиям и моментам, получим пять граничных условий, которые были установлены

Пуассоном. В теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, одно условие Пуассона оказывается лишним, так как восьмой порядок уравнений позволяет удовлетворить только четырем граничным условиям на одном из двух краев. Это несоответствие порядка уравнений числу граничных условий обычно устраняют, заменяя крутящий момент распределенными по краю эквивалентными усилиями [2.7]

$$-H'_{\kappa s} \tilde{e}_n. \quad (5.9)$$

В результате вместо (5.2) имеем на краю вектор усилий

$$\Phi_{\kappa} = R'_{\kappa} - H'_{\kappa s} \tilde{e}_n \quad (5.10)$$

и изгибающий момент G'_{κ} , причем

$$H'_{\kappa s} = H'_{\kappa \alpha} \alpha_s + H'_{\kappa \beta} \beta_s = -\frac{H'_{\kappa \alpha} v_2}{A} + \frac{H'_{\kappa \beta} v_1}{B}. \quad (5.11)$$

В этом случае граничные условия принимают вид

$$R_{\kappa} = R'_{\kappa} - H'_{\kappa s} \tilde{e}_n, \quad G_{\kappa} = G'_{\kappa}. \quad (5.12)$$

Здесь R'_{κ} , H'_{κ} , G'_{κ} определяются согласно (5.2), (5.7), (5.8), а R_{κ} , G_{κ} — заданные на контуре вектор усилий и изгибающий момент. Пусть вектор

$$R_{\kappa} = T_{\kappa} \tilde{v} + S_{\kappa} \tilde{t} + Q_{\kappa} \tilde{e}_n \quad (5.13)$$

развернут по осям вспомогательного триэдра, где T_{κ} , S_{κ} , Q_{κ} — погонные нормальная, сдвигающая и поперечная силы на контуре. Приравнивая в (5.12) множители при одинаковых ортах, получаем статические граничные условия в скалярной форме:

$$T_{\kappa} = T'_{\kappa}, \quad S_{\kappa} = S'_{\kappa}, \quad Q_{\kappa} = Q'_{\kappa} - H'_{\kappa s}, \quad G_{\kappa} = G'_{\kappa}, \quad (5.14)$$

где T'_{κ} , G'_{κ} , H'_{κ} , S'_{κ} , Q'_{κ} даны выражениями (5.7), (5.8). Если развернуть R_{κ} по осям основного триэдра

$$R_{\kappa} = T_{1\kappa} \tilde{e}_1 + T_{2\kappa} \tilde{e}_2 + Q_{n\kappa} \tilde{e}_n, \quad (5.15)$$

то из (5.12) с учетом (5.2), (5.3) соответственно имеем

$$\begin{aligned} T_{1\kappa} &= v_1 T_1 + v_2 S_2, & T_{2\kappa} &= v_1 S_1 + v_2 T_2, \\ Q_{n\kappa} &= v_1 Q_1 + v_2 Q_2 - H'_{\kappa s}, & G_{\kappa} &= G'_{\kappa}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Если граничное сечение совпадает с линией α , то

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \pi/2, & t &= -e_1, & \tilde{v} &= e_2, & v_2 &= 1, & v_1 &= 0, \\ T'_{\kappa} &= T_2, & S'_{\kappa} &= -S_2, & Q'_{\kappa} &= Q_2, & G'_{\kappa} &= M_2, & H'_{\kappa} &= H_2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Граничные условия (5.14), (5.16) принимают вид

$$\begin{aligned} T_k &= T_{2k} = T_2, & -S_k &= T_{1k} = S_2, \\ Q_k &= Q_{nk} = Q_2 - H_{1s}, & G_k &= M_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Если граничное сечение совпадает с линией β , то

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &= 0, & v_2 &= 0, & v_1 &= 1, & e_1 &= v, & e_2 &= t, \\ T'_k &= T_1, & S'_k &= S_1, & Q'_k &= Q_1, & G'_k &= M_1, & H'_k &= -H_1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Граничные условия (5.14), (5.16) имеют вид

$$\begin{aligned} T_k &= T_{1k} = T_1, & S_k &= T_{2k} = S_1, \\ Q_k &= Q_{nk} = Q_1 + H_{1s}, & G_k &= M_1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Кроме статических граничных условий, на контуре оболочки могут быть заданы кинематические граничные условия:

$$u = u_k, \quad v = v_k, \quad w = w_k, \quad \partial w_k / \partial v = \gamma_k, \quad (5.21)$$

где u_k, v_k, w_k, γ_k — заданные смещения контура и угол поворота нормали. Могут быть и смешанные граничные условия, которые можно получить, комбинируя (5.18), (5.20), (5.21). Если оболочка не имеет краев, то граничные условия заменяются условиями периодичности решений уравнений по обеим координатам. Если оболочка замкнута по одной из координат, то условие периодичности используется только по этой координате. Полученные граничные условия используются при следящей нагрузке. Если нагрузка консервативная по направлению, то вектор R_k удобно развернуть по ортам недеформированной поверхности

$$R_k = T_{1n}e_1 + T_{2n}e_2 + Q_{nn}e_n. \quad (5.22)$$

Приравнивая (5.15) и (5.22), с учетом (4.16) гл. I получим

$$\begin{aligned} T_{1n} &= T_{1k} + T_{2k}\gamma_2 + Q_{nk}\omega_1, & T_{2n} &= T_{2k} + T_{1k}\gamma_1 + Q_{nk}\omega_2, \\ Q_{nn} &= Q_{nk} - T_{1k}\omega_1 - T_{2k}\omega_2, & G_k &= G'_k. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь T_{1k}, Q_{nk} берутся согласно (5.6). Граничные условия (5.23) удобно использовать в случае консервативной по направлению контурной нагрузки, а условия (5.16) — при следящей нагрузке. Для граничного сечения, совпадающего с линией β , условия (5.23) имеют вид

$$\begin{aligned} T_{1n} &= T_1 + S_1\gamma_2 + (Q_1 + H_{1s})\omega_1, \\ T_{2n} &= S_1 + T_1\gamma_1 + (Q_1 + H_{1s})\omega_2, \\ Q_{nn} &= Q_1 + H_{1s} - T_1\omega_1 - S_1\omega_2, & G_k &= G'_k. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Г л а в а III

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Основные уравнения

Техническая теория оболочек используется при среднем изгибе [2.7], когда прогибы оболочки сравнимы с ее толщиной. Обычно при этом считают, что квадраты углов поворотов нормали к срединной поверхности малы в сравнении с единицей

$$\omega_i^2 \ll 1. \quad (1.1)$$

Малыми в этом случае оказываются также углы поворотов элементов вокруг нормали и компоненты линейной деформации

$$\gamma_i \ll 1, \quad \varepsilon_i \ll 1. \quad (1.2)$$

Если оболочка пологая, так что

$$\theta_0^2 = (L/R)^2 \ll 1, \quad (1.3)$$

где θ_0 — угол подъема оболочки, L — характерный размер (например, ширина), R — радиус кривизны, и изгибные деформации малы ($h\chi \leq 2\varepsilon_p$), то [2.7]

$$\varepsilon_1 \sim \gamma \sim \omega_1^2, \quad u \sim A\omega k_1 \sim L\omega/R, \quad Ak_1 u \sim \omega L^2/R. \quad (1.4)$$

При этом

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{w_\alpha}{A}, & \omega_2 &= -\frac{w_\beta}{B}, \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \left(\frac{w_\alpha}{A} \right)_\alpha + \frac{A_\beta}{AB} \frac{w_\beta}{B}, & \chi_2 &= \frac{1}{B} \left(\frac{w_\beta}{B} \right)_\beta + \frac{B_\alpha}{AB} \frac{w_\alpha}{A}, \\ \tau &= \frac{1}{B} \left(\frac{w_\alpha}{A} \right)_\beta - \frac{B_\alpha}{AB} \frac{w_\beta}{B} = \frac{1}{A} \left(\frac{w_\beta}{B} \right)_\alpha - \frac{A_\beta}{AB} \frac{w_\alpha}{A}, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \omega_1^2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \omega_2^2, & \varepsilon_{12} &= \gamma + \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величины ε_i , γ_i , γ вычисляются по прежним формулам (3.15) гл. II.

Уравнения равновесия пологих оболочек получаются из общих уравнений (2.14), (2.15) гл. II, если в них опустить поперечные силы в первых двух уравнениях и малые нелинейные слагаемые. Соответственно системе (2.14) получаем систему

Граничные условия (5.14), (5.16) принимают вид

$$\begin{aligned} T_k &= T_{2k} = T_2, & -S_k &= T_{1k} = S_2, \\ Q_k &= Q_{nk} = Q_2 - H_{1s}, & G_k &= M_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Если граничное сечение совпадает с линией β , то

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= 0, & v_2 &= 0, & v_1 &= 1, & e_1 &= v, & e_2 &= t, \\ T'_k &= T_1, & S'_k &= S_1, & Q'_k &= Q_1, & G'_k &= M_1, & H'_k &= -H_1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Граничные условия (5.14), (5.16) имеют вид

$$\begin{aligned} T_k &= T_{1k} = T_1, & S_k &= T_{2k} = S_1, \\ Q_k &= Q_{nk} = Q_1 + H_{1s}, & G_k &= M_1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Кроме статических граничных условий, на контуре оболочки могут быть заданы кинематические граничные условия:

$$u = u_k, \quad v = v_k, \quad w = w_k, \quad \partial w_k / \partial v = \gamma_k, \quad (5.21)$$

где u_k, v_k, w_k, γ_k — заданные смещения контура и угол поворота нормали. Могут быть и смешанные граничные условия, которые можно получить, комбинируя (5.18), (5.20), (5.21). Если оболочка не имеет краев, то граничные условия заменяются условиями периодичности решений уравнений по обеим координатам. Если оболочка замкнута по одной из координат, то условие периодичности используется только по этой координате. Полученные граничные условия используются при следящей нагрузке. Если нагрузка консервативная по направлению, то вектор R_k удобно развернуть по ортам недеформированной поверхности

$$R_k = T_{1n} e_1 + T_{2n} e_2 + Q_{nn} e_n. \quad (5.22)$$

Приравнивая (5.15) и (5.22), с учетом (4.16) гл. I получим

$$\begin{aligned} T_{1n} &= T_{1k} + T_{2k} \gamma_2 + Q_{nk} \omega_1, & T_{2n} &= T_{2k} + T_{1k} \gamma_1 + Q_{nk} \omega_2, \\ Q_{nn} &= Q_{nk} - T_{1k} \omega_1 - T_{2k} \omega_2, & G_k &= G'_k. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь T_{1k}, Q_{nk} берутся согласно (5.6). Граничные условия (5.23) удобно использовать в случае консервативной по направлению контурной нагрузки, а условия (5.16) — при следящей нагрузке. Для граничного сечения, совпадающего с линией β , условия (5.23) имеют вид

$$\begin{aligned} T_{1n} &= T_1 + S_1 \gamma_2 + (Q_1 + H_{1s}) \omega_1, \\ T_{2n} &= S_1 + T_1 \gamma_1 + (Q_1 + H_{1s}) \omega_2, \\ Q_{nn} &= Q_1 + H_{1s} - T_1 \omega_1 - S_1 \omega_2, & G_k &= G'_k. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Г л а в а III

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Основные уравнения

Техническая теория оболочек используется при среднем изгибе [2.7], когда прогибы оболочки сравнимы с ее толщиной. Обычно при этом считают, что квадраты углов поворотов нормали к срединной поверхности малы в сравнении с единицей

$$\omega_i^2 \ll 1. \quad (1.1)$$

Малыми в этом случае оказываются также углы поворотов элементов вокруг нормали и компоненты линейной деформации

$$\gamma_i \ll 1, \quad \varepsilon_i \ll 1. \quad (1.2)$$

Если оболочка пологая, так что

$$\theta_0^2 = (L/R)^2 \ll 1, \quad (1.3)$$

где θ_0 — угол подъема оболочки, L — характерный размер (например, ширина), R — радиус кривизны, и изгибные деформации малы ($h\chi \leq 2\varepsilon_p$), то [2.7]

$$\varepsilon_i \sim \gamma \sim \omega_i^2, \quad u \sim A\omega k_1 \sim L\omega/R, \quad Ak_1 u \sim \omega L^2/R. \quad (1.4)$$

При этом

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{w_a}{A}, & \omega_2 &= -\frac{w_\beta}{B}, \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \left(\frac{w_a}{A} \right)_a + \frac{A_\beta}{AB} \frac{w_\beta}{B}, & \chi_2 &= \frac{1}{B} \left(\frac{w_\beta}{B} \right)_\beta + \frac{B_a}{AB} \frac{w_a}{A}, \\ \tau &= \frac{1}{B} \left(\frac{w_a}{A} \right)_\beta - \frac{B_a}{AB} \frac{w_\beta}{B} = \frac{1}{A} \left(\frac{w_\beta}{B} \right)_a - \frac{A_\beta}{AB} \frac{w_a}{A}, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \omega_1^2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \omega_2^2, & \varepsilon_{12} &= \gamma + \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величины ε_i , γ_i , γ вычисляются по прежним формулам (3.15) гл. II.

Уравнения равновесия пологих оболочек получаются из общих уравнений (2.14), (2.15) гл. II, если в них опустить поперечные силы в первых двух уравнениях и малые нелинейные слагаемые. Соответственно системе (2.14) получаем систему

уравнений в проекциях на деформированные оси:

$$\begin{aligned}(BT_1)_\alpha + (AS_2)_\beta + A_\beta S_1 - B_\alpha T_2 + ABq_1 &= 0, \\ (AT_2)_\beta + (BS_1)_\alpha + B_\alpha S_2 - A_\beta T_1 + ABq_2 &= 0, \\ (BQ_1)_\alpha + (AQ_2)_\beta + AB[(k_2 + \chi_2)T_2 + (k_1 + \chi_1)T_1 + \\ &+ (S_1 + S_2)\tau + q + (q_1\omega_1 + q_2\omega_2)\delta_{ik}] = 0, \quad (1.6) \\ (BM_1)_\alpha + (AH_2)_\beta + A_\beta H_1 - B_\alpha M_2 - ABQ_1 &= 0, \\ (AM_2)_\beta + (BH_1)_\alpha + B_\alpha H_2 - A_\beta M_1 - ABQ_2 &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения в проекциях на недеформированные оси отличаются от (1.6) третьим уравнением

$$\begin{aligned}(BQ_1)_\alpha + (AQ_2)_\beta - [B(T_1\omega_1 + S_1\omega_2)]_\alpha - [A(T_2\omega_2 + S_2\omega_1)]_\beta + \\ + AB[k_1T_1 + k_2T_2 + q - (q_1\omega_1 + q_2\omega_2)\delta_{ic}] = 0. \quad (1.7)\end{aligned}$$

В уравнениях (1.6), (1.7) $\delta_{ic} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ при следящей поверхностной нагрузке, $\delta_{ic} = 0$, $\delta_{ik} = 1$ — при консервативной нагрузке.

Уравнения Кодацци (4.28) гл. I в технической теории оболочек используются в линейном виде

$$\begin{aligned}(A\chi_1)_\beta - (B\tau)_\alpha - A_\beta\chi_2 - B_\alpha\tau &= 0, \\ (B\chi_2)_\alpha - (A\tau)_\beta - B_\alpha\chi_1 - A_\beta\tau &= 0.\end{aligned} \quad (1.8)$$

Эти уравнения следуют из уравнений (4.28) гл. I, если в них опустить слагаемые, содержащие мембранные деформации. Уравнения (1.8) при соотношениях (1.5) удовлетворяются тождественно. Уравнение Гаусса (4.29) гл. I не меняется.

Граничные условия в теории пологих оболочек несколько упрощаются. В выражениях (5.23) гл. II можно опустить малые слагаемые, приняв

$$T_{1n} = T_{1k}, \quad T_{2n} = T_{2k}. \quad (1.9)$$

§ 2. Уравнения в смешанной форме

В случае, когда компоненты поверхностной нагрузки q_1 , q_2 равны нулю, уравнения технической теории оболочек можно представить в так называемой смешанной форме, выразив все величины через функцию прогиба w и функцию усилий F , которая вводится равенствами:

$$\begin{aligned}BT_1 &= \left(\frac{F_\beta}{B}\right)_\beta + \frac{B_\alpha}{A^2} F_\alpha; \quad AT_2 = \left(\frac{F_\alpha}{A}\right)_\alpha + \frac{A_\beta}{B^2} F_\beta, \\ S_1 &= S_2 = S = -\frac{1}{2} \left[\frac{B}{A} \left(\frac{F_\beta}{B^2}\right)_\alpha + \frac{A}{B} \left(\frac{F_\alpha}{A^2}\right)_\beta \right] = \\ &= -\frac{1}{AB} \left(F_{\alpha\beta} - \frac{A_\beta}{A} F_\alpha - \frac{B_\alpha}{B} F_\beta \right).\end{aligned} \quad (2.1)$$

Если считать, что

$$-ABk_1k_2 = \left(\frac{B_\alpha}{A}\right)_\alpha + \left(\frac{A_\beta}{B}\right)_\beta = 0,$$

то первые два уравнения равновесия (1.6) при этом удовлетворяются тождественно. Из четвертого и пятого уравнений, учитывая соотношения упругости (4.4) гл. II и условия Кодацци (3.6) гл. I, находим поперечные силы:

$$Q_1 = (D/A)(\chi_1 + \chi_2)_\alpha, \quad Q_2 = (D/B)(\chi_1 + \chi_2)_\beta. \quad (2.2)$$

Используя χ_1 и χ_2 , получаем

$$\chi_1 + \chi_2 = -\nabla^2 w, \quad (2.3)$$

где

$$\nabla^2 () = \frac{1}{AB} \left\{ \left[\frac{B}{A} ()_\alpha \right]_\alpha + \left[\frac{A}{B} ()_\beta \right]_\beta \right\} \quad (2.4)$$

— оператор Лапласа в криволинейных координатах. Следовательно,

$$Q_1 = -(D/A)(\nabla^2 w)_\alpha, \quad Q_2 = -(D/B)(\nabla^2 w)_\beta. \quad (2.5)$$

Подставляя эти выражения в третье уравнение равновесия и используя выражения (2.1) усилий через функцию F , получаем соответственно системам (1.6), (1.7)

$$\begin{aligned} D\nabla^2 \nabla^2 w - T_1(k_1 + \chi_1) - T_2(k_2 + \chi_2) - 2S\tau - q &= 0, \\ D\nabla^2 \nabla^2 w - k_1 T_1 - k_2 T_2 + (1/AB) \{ [B(T_1 \omega_1) + S_1 \omega_2]_\alpha + \\ &+ [A(T_2 \omega_2 + S_2 \omega_1)]_\beta \} - q + (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2) \delta_{ic} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

или

$$\begin{aligned} D\nabla^2 \nabla^2 w - \nabla_k^2 F - q - T_1 \chi_1 - T_2 \chi_2 - 2S\tau &= 0, \\ D\nabla^2 \nabla^2 w - \nabla_k^2 F - q + (1/AB) \{ [B(T_1 \omega_1 + S_1 \omega_2)]_\alpha + \\ &+ [A(T_2 \omega_2 + S_2 \omega_1)]_\beta \} + (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2) \delta_{ic} = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\nabla_k^2 () = \frac{1}{AB} \left\{ \left[\frac{1}{R^2} \frac{B}{A} ()_\alpha \right]_\alpha + \left[\frac{1}{R_1} \frac{A}{B} ()_\beta \right]_\beta \right\}. \quad (2.8)$$

Таким образом, системы уравнений равновесия сведены к одному из уравнений (2.7) относительно двух функций w и F . Второе, недостающее, уравнение можно получить из уравнения Гаусса (4.29) гл. I, если в него подставить выражение деформаций

$$\varepsilon_{11} E h = T_1 - \nu T_2, \quad \varepsilon_{22} E h = T_2 - \nu T_1, \quad \varepsilon_{12} E h = 2(1 + \nu) S, \quad (2.9)$$

выразить усилия T_i , S через функцию F согласно (2.1) и преобразовать соответствующие преобразования

$$\nabla^2 \nabla^2 F + E h (k_1 \chi_2 + k_2 \chi_1 + \chi_1 \chi_2 - \tau^2) = 0 \quad (2.10)$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 F + Eh (\nabla_k^2 w + \chi_1 \chi_2 - \tau^2) = 0. \quad (2.11)$$

Уравнения (2.7) и (2.11) и есть нелинейные уравнения технической теории оболочек, записанные в смешанной форме. Усилия и деформации выражаются через функции w и F согласно (1.5), (2.1), (2.9). Через эти функции формулируются и граничные условия. При выводе уравнения (2.11) принимается допущение о равенстве нулю гауссовой кривизны. Для оболочек нулевой гауссовой кривизны, разумеется, это допущение не используется.

§ 3. Пологие оболочки

Уравнения технической теории оболочек допускают дальнейшее упрощение, если считать, что срединная поверхность оболочек имеет евклидову метрику. Таким допущением, как показал В. З. Власов [3.1], можно пользоваться при

$$a/f \geq 5,$$

где a — наименьший размер оболочки в плане, f — стрела подъема. Принимая это допущение, полагают постоянными параметрами Ляме ($A = B = \text{const}$). Согласно условиям Кодаши в этом случае постоянными следует считать и кривизны k_1 , k_2 . Взяв в качестве α , β размерные координаты, следует считать $A = B = 1$, отождествляя при этом приращения дуг координатных линий с приращениями координат ($ds_1 = d\alpha$, $ds_2 = d\beta$). Тогда согласно (1.5) — (2.11) имеем:

кинематические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_\alpha - k_1 w, & \varepsilon_2 &= v_\beta - k_2 w, & \gamma &= u_\beta + v_\alpha, \\ \omega_1 &= -w_\alpha, & \omega_2 &= -w_\beta, \\ \chi_1 &= w_{\alpha\alpha}, & \chi_2 &= w_{\beta\beta}, & \tau &= w_{\alpha\beta}, \\ \varepsilon_{11} &= u_\alpha - k_1 w + \frac{1}{2} w_\alpha^2, & \varepsilon_{22} &= v_\beta - k_2 w + \frac{1}{2} w_\beta^2, \\ \varepsilon_{12} &= u_\beta + v_\alpha + w_\alpha w_\beta; \end{aligned} \quad (3.1)$$

статические соотношения:

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) = F_{\beta\beta}, & T_2 &= K(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) = F_{\alpha\alpha}, \\ S_1 &= S_2 = S = K\nu_1 \varepsilon_{12} = -F_{\alpha\beta}, & H &= -2D\nu_1 w_{\alpha\beta} = H_1 = H_2, \\ M_1 &= -D(w_{\alpha\alpha} + \nu w_{\beta\beta}), & M_2 &= -D(w_{\beta\beta} + \nu w_{\alpha\alpha}), \\ Q_1 &= -D\nabla^2 w_\alpha, & Q_2 &= -D\nabla^2 w_\beta, \\ K &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & \nu_1 &= \frac{1-\nu}{2}, & \nabla^2 () &= ()_{\alpha\alpha} + ()_{\beta\beta}, & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} T_{1\alpha} + S_{\beta} + q_1 &= 0, \quad T_{2\beta} + S_{\alpha} + q_2 = 0, \\ Q_{1\alpha} + Q_{2\beta} + T_1(k_1 + w_{\alpha\alpha}) + T_2(k_2 + w_{\beta\beta}) + 2S w_{\alpha\beta} + q &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_{1\alpha} + H_{\beta}, \quad Q_2 = M_{2\beta} + H_{\alpha}, \\ Q_{1\alpha} + Q_{2\beta} + (T_1 w_{\alpha} + S w_{\beta})_{\alpha} + (T_2 w_{\beta} + S w_{\alpha})_{\beta} + \\ &+ k_1 T_1 + k_2 T_2 + q + (q_1 w_{\alpha} + q_2 w_{\beta}) \delta_{ic} = 0; \end{aligned} \quad (3.4)$$

уравнение совместности деформаций (4.29) гл. I:

$$k_1 \chi_2 + k_2 \chi_1 + \chi_1 \chi_2 - \tau^2 - \varepsilon_{12\alpha\beta} + \varepsilon_{11\beta\beta} + \varepsilon_{22\alpha\alpha} = 0; \quad (3.5)$$

уравнения (2.7), (2.11) в смешанной форме:

$$\begin{aligned} DV^4 w - \nabla_k^2 F - q - T_1 w_{\alpha\alpha} - T_2 w_{\beta\beta} - 2S w_{\alpha\beta} + \\ + (q_1 w_{\alpha} + q_2 w_{\beta}) \delta_{ik} = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} DV^4 w - \nabla_k^2 F - q - (T_1 w_{\alpha} + S w_{\beta})_{\alpha} - (T_2 w_{\beta} + S w_{\alpha})_{\beta} - \\ - (q_1 w_{\alpha} + q_2 w_{\beta}) \delta_{ic} = 0, \\ \nabla^4 F + Fh(\nabla_k^2 w + w_{\alpha\alpha} w_{\beta\beta} - w_{\alpha\beta}^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla_k^2 () = k_2 ()_{\alpha} + k_1 ()_{\beta}. \quad (3.8)$$

При следящей нагрузке $\delta_{ic} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ и $\delta_{ic} = 0$, $\delta_{ik} = 1$ — при консервативной нагрузке (постоянной по направлению).

§ 4. Вариационные уравнения

Согласно принципу возможных перемещений для равновесного состояния вариация полной потенциальной энергии равна нулю

$$\delta \Pi = 0. \quad (4.1)$$

Выражение полной потенциальной энергии можно [2.7] представить в виде

$$\begin{aligned} \Pi = \iint \left\{ \frac{D}{2} [(\nabla^2 w)^2 + 2(1 - \nu)(w_{\alpha\beta}^2 - w_{\alpha\alpha} w_{\beta\beta})] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2Eh} [(\nabla^2 F)^2 + 2(1 + \nu)(F_{\alpha\beta}^2 - F_{\alpha\alpha} F_{\beta\beta})] - F_{\alpha\alpha} k_2 w - F_{\beta\beta} k_1 w + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (F_{\alpha\alpha} w_{\beta}^2 + F_{\beta\beta} w_{\alpha}^2 - 2F_{\alpha\beta} w_{\alpha} w_{\beta}) + q w \right\} d\alpha d\beta + \\ + \int [(T_{1k} - T_{1n})u + (T_{2k} - T_{2n})v + G_{\kappa} w_{\nu} - Q_{nn} w] ds. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) можно преобразовать к виду [2.7]

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \iint (D\nabla^4 w - k_2 F_{\alpha\alpha} - k_1 F_{\beta\beta} - F_{\beta\beta} w_{\alpha\alpha} - F_{\alpha\alpha} w_{\beta\beta} + \\ & + 2F_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} - q) \delta w \, d\alpha \, d\beta + \\ & + \iint [w_{\alpha\beta}^2 - w_{\alpha\alpha} w_{\beta\beta} - k_1 w_{\beta\beta} - k_2 w_{\alpha\alpha} - (1/Eh) \nabla^4 F] \delta F \, d\alpha \, d\beta + \\ & + \int [(Q_{nk} - T_{1k} \omega_1 - T_{2k} \omega_2 - Q_{nn}) \delta w + (G_k - G'_k) \delta w_v + \\ & + (T_{1k} - T_{1n}) \delta u + (T_{2k} - T_{2n}) \delta v] \, ds = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Считая в области интегрирования независимыми вариации δw , δF , а на контуре вариации δu , δv , δw , δw_v , получаем отсюда уравнения равновесия, совместности деформаций и граничные условия в форме Бубнова

$$\iint (D\nabla^4 w - k_1 F_{\beta\beta} - k_2 F_{\alpha\alpha} - F_{\beta\beta} w_{\alpha\alpha} - F_{\alpha\alpha} w_{\beta\beta} + 2F_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} - q) \delta w \, d\alpha \, d\beta = 0, \quad (4.4)$$

$$\iint [\nabla^4 F + Eh (k_1 w_{\beta\beta} + k_2 w_{\alpha\alpha} + w_{\alpha\alpha} w_{\beta\beta} - w_{\alpha\beta}^2)] \delta F \, d\alpha \, d\beta = 0,$$

$$\int (Q_{nk} - T_{1k} \omega_1 - T_{2k} \omega_2 - Q_{nn}) \delta w \, ds = 0,$$

$$\int (G_k - G'_k) \delta w_v \, ds = 0, \quad (4.5)$$

$$\int (T_{1k} - T_{1n}) \delta u \, ds = 0, \quad \int (T_{2k} - T_{2n}) \delta v \, ds = 0.$$

Приравнивая нулю множители при произвольных вариациях, приходим к уравнениям (3.6), (3.7) и статическим граничным условиям (1.9) и (5.23) гл. II в обычной форме.

§ 5. Пологие оболочки с начальными неправильностями

Возьмем пологую оболочку, отнесенную к ортогональным криволинейным координатам α , β . Перемещения точек срединной поверхности по нормали, характеризующие ее отклонение от правильной геометрической формы, обозначим через w_0 . Будем считать, что амплитуда этих перемещений не превышает толщины оболочки и что возникшие неправильности формы в результате этих перемещений имеют вид пологих участков. В таком случае компоненты начальной изгибной деформации определяются зависимостями (1.5), в которых w следует заметить на w_0 . Под действием нагрузки возникают перемещения u ,

v , w точек срединной поверхности и деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + 1/2 \omega_1^2 + \omega_1 \omega_{10}, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + 1/2 \omega_2^2 + \omega_2 \omega_{20}, \\ \varepsilon_{12} &= \gamma + \omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_{10} + \omega_1 \omega_{20}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Усилия, моменты и компоненты линейной деформации ε_i , γ_i , ω_i , χ_i определяются прежними формулами (1.5). В уравнениях равновесия (1.6), (1.7), (2.7) w , ω_i , χ_i , τ следует заменить на $w + w_0$, $\omega_i + \omega_{i0}$, ...

Условие совместности деформации (2.11) принимает вид

$$\nabla^4 F + Eh[k_1(\chi_2 + \chi_{20}) + k_2(\chi_1 + \chi_{10}) + \chi_1 \chi_2 + \chi_1 \chi_{20} + \chi_2 \chi_{10} - \tau^2 - 2\tau \tau_0] = 0 \quad (5.2)$$

или

$$\nabla^4 F + Eh[\nabla_k^2(w + w_0) + \chi_1 \chi_2 - \tau^2 + \chi_1 \chi_{20} + \chi_2 \chi_{10} - 2\tau \tau_0] = 0. \quad (5.3)$$

В статических граничных условиях величины ω_i заменяются на $\omega_i + \omega_{i0}$.

§ 6. Нелинейный краевой эффект

Уравнения пологих оболочек можно использовать и для непологих оболочек, если их напряженное состояние имеет большой показатель изменяемости. Рассмотрим, к примеру, осесимметрично нагруженные оболочки вращения ($q_2 = 0$). Полагая равными нулю $\underline{v}$, $\underline{\varepsilon}_{12}$ и производные по окружной координате, из уравнений (3.1)–(3.3) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_a - k_1 w + 1/2 \omega_a^2, & \varepsilon_{22} &= -k_2 w, & \varepsilon_{12} &= v_a = 0, \\ \chi_1 &= w_{aa}, & \chi_2 &= \tau = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$T_1 = K(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad T_2 = K(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \quad Q_2 = S = H = 0, \quad (6.2)$$

$$M_1 = -D w_{aa}, \quad M_2 = \nu M_1, \quad Q_1 = -D w_{aaa},$$

$$T_{1a} + q_1 = 0, \quad Q_{1a} + k_2 T_2 + T_1(k_1 + \chi_1) + q - q_1 w_a \delta_{ik} = 0. \quad (6.3)$$

Исключая ε_{11} , находим

$$T_2 = \nu T_1 + Eh \varepsilon_{22} = \nu T_1 - Eh k_2 w. \quad (6.4)$$

Из второго уравнения (6.3) получаем разрешающее уравнение

$$D w_{aaaa} - T_1 w_{aa} + Eh k_2^2 w - T_{1a} w_a \delta_{ik} - T_1(k_1 + \nu k_2) - q = 0, \quad (6.5)$$

которое обычно называют уравнением нелинейного краевого эффекта. При этом согласно первому уравнению (6.3)

$$T_1 = - \int q_1 da + C. \quad (6.6)$$

В отличие от уравнения линейного краевого эффекта оно содержит члены с первой и второй производной от прогиба. Фактически это уравнение линейное, но наличие этих членов не позволяет использовать принцип наложения решений, поскольку усилие T_1 входит в уравнение нелинейно.

Если $q_1 = 0$, то $T_1 = C = \text{const.}$ Уравнение (6.5) имеет постоянные коэффициенты. Постоянная C определяется из граничных условий. Если, например, на краях оболочки приложены сжимающие осевые усилия N , то $T_1 = -N$.

Г л а в а IV

УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

В наиболее общей форме устойчивость определяется как свойство системы мало отклоняться от исходного движения или равновесия при действии малых возмущений. Это понятие базируется на динамических свойствах системы. Впервые, по-видимому, динамический критерий использовался Лагранжем при исследовании консервативных систем с конечным числом степеней свободы. Строгое математическое определение этого критерия для частного класса систем было дано А. М. Ляпуновым [4.8]. Впоследствии критерий был обобщен и расширен [4.12]. Согласно динамическому критерию исходная форма движения или равновесия системы устойчива, если малые возмущения вызывают малые отклонения системы от этой формы, которые могут быть сделаны как угодно малыми при уменьшении возмущений. Система будет неустойчивой, если даже сколь угодно малые возмущения вызывают конечные отклонения системы от ее исходной формы.

Практическое использование динамического критерия при оценке устойчивости системы сводится к интегрированию уравнений движения системы и исследованию поведения их во времени. Если эти решения во времени остаются ограниченными, то система считается устойчивой, если нет — неустойчивой.

Несмотря на свою общность и строгость, динамический критерий не нашел широкого применения в механике твердых деформируемых тел. Большинство задач устойчивости было решено статическим путем в рамках концепции Эйлера. Согласно этой концепции неустойчивость системы характеризуется появлением смежной формы равновесия, бесконечно близкой к ее исходной форме. Задача исследования устойчивости исходной равновесной формы системы в этом случае заменяется задачей разыскания точек разветвления форм равновесия или, как их

еще называют, точек бифуркации форм равновесия. Критическая нагрузка определяется как наименьшая из нагрузок, при которых появляются смежные формы равновесия. С практической стороны использование статического критерия сводится к нахождению собственных чисел и соответствующих им векторов линеаризованных дифференциальных уравнений, которые получаются из нелинейных уравнений путем их варьирования или при рассмотрении двух смежных равновесных состояний. Зачастую достаточно вычислить первое собственное значение и собственный вектор, которые соответственно определяют критическую нагрузку и форму потери устойчивости. В отличие от динамического критерия, статический критерий имеет ограниченную область применимости. В основном он применим к консервативным системам.

Разновидностью статического критерия является критерий энергетический. В основе этого критерия лежат два фундаментальных принципа механики сплошных сред: принцип возможных перемещений и принцип возможных изменений напряженного состояния. Из принципа возможных перемещений непосредственно следует условие стационарности полной потенциальной энергии системы $\delta\Pi = 0$, согласно которому из всех перемещений, удовлетворяющих граничным условиям, перемещения, удовлетворяющие уравнениям равновесия, придают полной потенциальной энергии стационарное значение. Из принципа возможных изменений напряженного состояния следует условие стационарности дополнительной энергии, согласно которому из всех возможных напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и граничным условиям, напряжения, удовлетворяющие уравнениям неразрывности деформаций, придают дополнительной энергии стационарное значение.

Условие $\delta\Pi = 0$ позволяет выделить равновесное состояние системы. Об устойчивости этого состояния можно судить с помощью теоремы Лагранжа — Дирихле. Если равновесное состояние устойчиво, то полная потенциальная энергия системы имеет минимум ($\delta\Pi = 0$, $\delta^2\Pi > 0$), если неустойчиво — максимум ($\delta\Pi = 0$, $\delta^2\Pi < 0$); безразличному равновесию соответствует постоянная величина энергии ($\delta\Pi = 0$, $\delta^2\Pi = 0$). Здесь $\delta\Pi$, $\delta^2\Pi$ — первая и вторая вариации полной энергии. Эта теорема впервые была сформулирована Лагранжем, доказательство ее для системы с конечным числом степеней свободы было дано Дирихле.

Эту теорему формулируют еще и другим образом [4.17]: если полная энергия есть непрерывная функция, то равновесие системы, содержащей консервативные и диссипативные силы, устойчиво, когда потенциальная энергия положительно определена.

Исследование знака второй вариации на всевозможных перемещениях представляет собой трудную задачу. В линейных задачах устойчивости обычно используют условия безразличного равновесия

$$\delta^2\Pi = 0 \quad (0.1)$$

и концепцию Эйлера о разветвлении форм равновесия. Представим полную энергию системы в безразличном равновесии в виде суммы энергии системы в исходном состоянии и приращения энергии при появлении смежного равновесного состояния:

$$\Pi = \Pi_0 + \delta\Pi + \delta^2\Pi + \dots \quad (0.2)$$

Здесь $\delta\Pi$, $\delta^2\Pi$ — части энергии, содержащие соответственно первые и вторые степени дополнительных смещений в смежном состоянии. Величина $\delta\Pi = 0$ как первая вариация энергии равновесного исходного состояния. Варьируя (0.2) и учитывая, что исходное состояние не варьируется ($\delta\Pi_0 = 0$), получаем

$$\delta(\delta^2\Pi) = 0. \quad (0.3)$$

Это условие является вариационной формулировкой статического критерия устойчивости, так как из него непосредственно следуют дифференциальные уравнения статического критерия. Таким образом, для исследования устойчивости можно использовать или условие (0.1), или условие (0.3). Эти условия свидетельствуют о том, что приращение энергии в точке бифуркации становится положительно полуопределенной функцией — функцией, принимающей или положительные, или нулевые значения. Можно также использовать условие минимума второй вариации

$$\delta^2\Pi = \min, \quad (0.4)$$

которое следует из положительной полуопределенности приращения энергии. Действительно, если в точке бифуркации $\delta^2\Pi = 0$, то в окрестности этой точки положительная полуопределенная функция будет иметь значение больше нуля.

§ 1. Общие уравнения устойчивости

Уравнения устойчивости тонких оболочек получим из нелинейных уравнений, используя статический критерий Эйлера. Подставляя в уравнения (2.14), (2.15) гл. II

$$T_1^0 + T_1, \quad M_1^0 + M_1, \quad \dots, \quad u^0 + u, \quad w^0 + w, \quad \dots, \quad q_i \quad (1.1)$$

вместо

$$T_1, \quad M_1, \quad \dots, \quad u, \quad w, \quad \dots, \quad q_i, \quad (1.2)$$

вычитая из них уравнения исходного состояния (индекс «0»), которые в общем случае являются нелинейными, и линеаризуя

оставшуюся часть уравнений, получаем уравнения устойчивости:

$$\begin{aligned}(BT_1)_\alpha + (AS_2)_\beta + S_1 A_\beta - B_\alpha T_2 - \frac{ABk_1 Q_1 + X}{1} &= 0, \\ (AT_2)_\beta + (BS_1)_\alpha + S_2 B_\alpha - A_\beta T_1 - \frac{ABk_2 Q_2 + Y}{1} &= 0, \\ (BQ_1)_\alpha + (AQ_2)_\beta + AB(k_1 T_1 + k_2 T_2) + Z &= 0, \\ (BM_1)_\alpha + (AH_2)_\beta + H_1 A_\beta - B_\alpha M_2 - ABQ_1 &= 0, \\ (AM_2)_\beta + (BH_1)_\alpha + H_2 B_\alpha - A_\beta M_1 - ABQ_2 &= 0.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}X &= (BT_1^*)_\alpha + (AS_2^*)_\beta + A_\beta S_1^* - B_\alpha T_2^* - AB(k_1 Q_1^* - q_1^*), \\ Y &= (AT_2^*)_\beta + (BS_1^*)_\alpha + B_\alpha S_2^* - A_\beta T_1^* - AB(k_2 Q_2^* - q_2^*), \\ Z &= (BQ_1^*)_\alpha + (AQ_2^*)_\beta + AB(k_1 T_1^* + k_2 T_2^* + q^*), \\ T_1^* &= T_1^0 \varepsilon_2 + T_1 \varepsilon_2^0 + S_1^0 \gamma_2 + S_1 \gamma_2^0 + Q_1^0 \omega_1 + \omega_1^0 Q_1, \\ T_2^* &= T_2^0 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_1^0 + S_2^0 \gamma_1 + S_2 \gamma_1^0 + Q_2^0 \omega_2 + \omega_2^0 Q_2, \\ S_1^* &= S_1^0 \varepsilon_2 + S_1 \varepsilon_2^0 + T_1^0 \gamma_1 + T_1 \gamma_1^0 + Q_1^0 \omega_2 + Q_1 \omega_2^0, \\ S_2^* &= S_2^0 \varepsilon_1 + S_2 \varepsilon_1^0 + T_2^0 \gamma_2 + T_2 \gamma_2^0 + Q_2^0 \omega_1 + Q_2 \omega_1^0, \\ Q_1^* &= Q_1^0 \varepsilon_2 + Q_1 \varepsilon_2^0 - T_1^0 \omega_1 - T_1 \omega_1^0 - S_1^0 \omega_2 - S_1 \omega_2^0, \\ Q_2^* &= Q_2^0 \varepsilon_1 + Q_2 \varepsilon_1^0 - T_2^0 \omega_2 - T_2 \omega_2^0 - S_2^0 \omega_1 - S_2 \omega_1^0, \\ q_1^* &= q_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ic}(q_2 \gamma_2 + q \omega_1), \\ q_2^* &= q_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ic}(q_1 \gamma_1 + q \omega_2), \\ q^* &= q(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \delta_{ic}(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2)\end{aligned}\quad (1.4)$$

для системы, отнесенной к недеформированным осям, и

$$\begin{aligned}X &= [B(T_1^0 \varepsilon_2 + T_1 \varepsilon_2^0)]_\alpha + [A(S_2^0 \varepsilon_1 + S_2 \varepsilon_1^0)]_\beta + A_\beta(T_1^0 \gamma + T_1 \gamma^0) + \\ &+ T_2^0[(A \gamma)_\beta - (B \varepsilon_2)_\alpha] + T_2[(A \gamma^0)_\beta - (B \varepsilon_2^0)_\alpha] - B_\alpha(S_2^0 \gamma + S_2 \gamma^0) + \\ &+ S_1^0[(A \varepsilon_1)_\beta - B_\alpha \gamma] + S_1[(A \varepsilon_1^0)_\beta - B_\alpha \gamma^0] + AB[q_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \\ &- Q_1^0 \chi_1 - Q_1 \chi_1^0 - Q_2^0 \tau - Q_2 \tau^0 - \delta_{ik}(q_2 \gamma_2 + q \omega_1)], \\ Y &= [A(T_2^0 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_1^0)]_\beta + [B(S_1^0 \varepsilon_2 + S_1 \varepsilon_2^0)]_\alpha + B_\alpha(T_2^0 \gamma + T_2 \gamma^0) + \\ &+ T_1^0[(B \gamma)_\alpha - (A \varepsilon_1)_\beta] + T_1[(B \gamma^0)_\alpha - (A \varepsilon_1^0)_\beta] - A_\beta(S_1^0 \gamma + S_1 \gamma^0) + \\ &+ S_2^0[(B \varepsilon_2)_\alpha - A_\beta \gamma] + S_2[(B \varepsilon_2^0)_\alpha - A_\beta \gamma^0] + AB[q_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - \\ &- Q_2^0 \chi_2 - Q_2 \chi_2^0 - Q_1^0 \tau - Q_1 \tau^0 - \delta_{ik}(q_1 \gamma_1 + q \omega_2)], \\ Z &= [B(Q_1^0 \varepsilon_2 + Q_1 \varepsilon_2^0)]_\alpha + [A(Q_2^0 \varepsilon_1 + Q_2 \varepsilon_1^0)]_\beta + AB[T_1^0(\chi_1 + k_1 \varepsilon_2) + \\ &+ T_1(\chi_1^0 + k_1 \varepsilon_2^0) + T_2^0(\chi_2 + k_2 \varepsilon_1) + T_2(\chi_2^0 + k_2 \varepsilon_1^0) + (S_1^0 + S_2^0)\tau + \\ &+ (S_1 + S_2)\tau^0 + q(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ik}(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2)]\end{aligned}\quad (1.5)$$

для системы, отнесенной к деформированным осям. Здесь $\delta_{ic} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ при следящей нагрузке, $\delta_{ic} = 0$, $\delta_{ik} = 1$ при консервативной по направлению нагрузке. Соответственно уравнениям (1.3) линейризируются и соотношения (4.18) гл. I:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_1^0 \varepsilon_1 + \gamma_1^0 \gamma_1 + \omega_1^0 \omega_1, \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \varepsilon_2^0 \varepsilon_2 + \gamma_2^0 \gamma_2 + \omega_2^0 \omega_2, \\ \varepsilon_{12} &= \gamma + \varepsilon_1^0 \gamma + \gamma_2^0 \varepsilon_1 + \varepsilon_2^0 \gamma_1 + \varepsilon_2 \gamma_1^0 + \omega_1^0 \omega_2 + \omega_2^0 \omega_1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Соотношения упругости (4.4) гл. II остаются в силе; ε_i , ω_i , γ_i , γ определяются прежними выражениями (4.13), (4.19) гл. I. Но теперь в этих выражениях под u , v , w следует понимать смещения, возникающие при потере устойчивости; величины ε_i^0 , γ_i^0 , ω_i^0 определяются так же, как и ε_i , ω_i , γ_i , но с заменой u , v , w на u^0 , v^0 , w^0 .

В уравнениях устойчивости, как видно из выражений (1.5), роль деформации сдвига срединной поверхности определяется неоднородностью усилий и величиной сдвигов в исходном состоянии, а также изменяемостью параметров Ляме. Для однородных исходных состояний в случае отсутствия крутящих моментов и постоянных значений параметров Ляме слагаемые, содержащие множителями деформации сдвига, исчезают. Поэтому в этом случае при составлении уравнений устойчивости сдвиг координатных линий можно не учитывать.

Уравнения (1.3) необходимо дополнить граничными условиями. Эти условия могут быть получены из условий § 5 гл. II путем подстановки в них (1.1), вычитания условий, соответствующих исходному состоянию, и последующей линейризации. Поскольку согласно статическому критерию нагрузка считается стационарной, то граничные условия будут однородными. Линейные части этих условий по форме остаются прежними, однако в этом случае в них все величины следует считать относящимися к смежному равновесному состоянию. Нелинейные граничные условия линейризируются. Вместо (5.23), (5.24) гл. II имеем:

$$\begin{aligned} T_{1k} + T_{2k}^0 \gamma_2 + Q_{nk}^0 \omega_1 + T_{2k} \gamma_2^0 + Q_{nk} \omega_1^0 &= 0, \\ T_{2k} + T_{1k}^0 \gamma_1 + Q_{nk}^0 \omega_2 + T_{1k} \gamma_1^0 + Q_{nk} \omega_2^0 &= 0, \\ Q_{nk} - T_{1k}^0 \omega_1 - T_{2k}^0 \omega_2 - T_{1k} \omega_1^0 - T_{2k} \omega_2^0 &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} T_1 + S_1^0 \gamma_2 + (Q_1^0 + H_{1\beta}^0) \omega_1 + (Q_1 + H_{1\beta}) \omega_1^0 + S_1 \gamma_2^0 &= 0, \\ S_1 + T_1^0 \gamma_1 + (Q_1^0 + H_{1\beta}^0) \omega_2 + (Q_1 + H_{1\beta}) \omega_2^0 + T_1 \gamma_1^0 &= 0, \\ Q_1 + H_{1\beta} - T_1^0 \omega_1 - S_1^0 \omega_2 - T_1 \omega_1^0 - S_1 \omega_2^0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Соответственно изменяются и граничные условия (4.5) гл. III в интегральной форме.

§ 2. Исследование и упрощение уравнений

Полученные в § 1 уравнения устойчивости громоздки, содержат несущественные слагаемые и поэтому неудобны для практического применения. С целью упрощения уравнений проведем их исследование, оценивая порядки величин отдельных слагаемых.

Рассмотрим оболочки с достаточно плавно изменяющейся геометрией, для которых можно считать

$$A \sim B \sim R, \quad A_\alpha \sim A_\beta \sim B_\alpha \sim B_\beta \leq R, \quad (2.1)$$

где R — наименьший из радиусов кривизны. Для исходного и нейтрального состояний зададимся, как это обычно принято в подобных исследованиях, коэффициентами изменчивости μ_j^0 , μ_j ($j = \alpha, \beta$), показывающими, во сколько раз увеличиваются (или уменьшаются) функции, характеризующие эти состояния, при дифференцировании по координатам α, β . Таким образом, имеем

$$\varepsilon_{ij}^0 \sim \mu_j^0 \varepsilon_i^0, \quad \chi_{ij}^0 \sim \mu_j^0 \chi_i^0, \quad \varepsilon_{ij} = \mu_j \varepsilon_i, \dots \quad (2.2)$$

Используя линейную часть уравнений (2.14) гл. II, получаем оценки для компонент внешней нагрузки:

$$q \sim kT_2^0, \quad q_1 \sim kT_1^0 \mu_\alpha^0, \quad q_2 \sim kS^0 \mu_\alpha^0, \quad k = 1/R. \quad (2.3)$$

Мембранные деформации удлинений срединной поверхности можно считать одного порядка:

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \varepsilon. \quad (2.4)$$

При потере устойчивости возникают изгибные деформации, сравнимые по величине с мембранными, так что

$$h\chi \sim \varepsilon, \quad (2.5)$$

где χ — наибольшее из χ_1, χ_2 .

Ниже будут рассмотрены основные случаи потери устойчивости, встречающиеся на практике.

1. Местная потеря устойчивости

При местной потере устойчивости образуются короткие волны. Функции, характеризующие нейтральное состояние, при дифференцировании по крайней мере по одной из координат α или β существенно возрастают. При этом, как известно, смещения u, v значительно меньше смещений w . Так что в выражениях изгибной деформации (3.15) гл. II можно опустить слагаемые, содержащие смещения u, v и их производные.

Исследуем некоторые частные случаи местной потери устойчивости.

Предположим, что $\mu_\alpha \sim \mu_\beta \sim \mu \gg 1$. Волнообразование с такими коэффициентами изменяемости характерно для потери устойчивости недлинных цилиндрических оболочек при действии сжимающих усилий. При этом смещения и деформации существенно возрастают при дифференцировании по обеим координатам. Линейная часть уравнений (1.3) является главной. Используя ее, определяем наибольшие величины мембранных усилий нейтрального состояния

$$T_i \sim S \sim E h \varepsilon. \quad (2.6)$$

Для изгибных деформаций имеем оценки:

$$h\chi_2 \sim h\chi_1 \sim \varepsilon. \quad (2.7)$$

Из соотношений (3.15), (4.4) гл. II найдем

$$\gamma \sim \varepsilon, \quad \omega \sim \varepsilon \frac{R^2}{h\mu^2}, \quad \tau \sim \frac{\varepsilon}{h}, \quad Q_2 \sim Q_1 \sim E h^2 k \varepsilon \mu, \quad \omega_1 \sim \omega_2 \sim k \mu \omega. \quad (2.8)$$

Третье уравнение системы (1.3) имеет порядок $E h \varepsilon R$. Из сравнения главных слагаемых этого уравнения определим порядок коэффициента изменяемости μ :

$$\mu \sim \sqrt{R/h}, \quad (2.9)$$

порядки усилий исходного состояния, вызывающих потерю устойчивости данного вида:

$$T_i^0 \sim S^0 \sim E h^2 k \quad (2.10)$$

и величины изгибных деформаций исходного состояния:

$$h\chi_i^0 \sim h\tau^0 \sim h k.$$

Отсюда получим наибольшие порядки величин деформаций, прогибов и углов поворотов в исходном состоянии:

$$\varepsilon_i^0 \sim \gamma^0 \sim h k, \quad \omega_i^0 \sim \mu_0^{-1}, \quad \omega^0 \sim h, \quad \mu_0 \sim \mu. \quad (2.11)$$

Смещение v имеет порядок $\omega \lambda k$, где λ — длина полуволны. В случае сжатия $\lambda \sim \sqrt{R h}$. При этом углы поворота γ_i будут порядка ε . Углы поворотов γ_i^0 в исходном состоянии также не будут превышать ε . Второе и первое уравнение имеют порядки $E h R \varepsilon \mu$.

Используя полученные оценки и сравнивая порядки слагаемых в уравнениях (1.3), приходим к заключению, что при рассмотренной форме потери устойчивости в уравнениях (1.3) следует опустить подчеркнутые слагаемые, а в выражении для Z — слагаемые, содержащие в качестве множителей компоненты

тангенциальной деформации, при условии выполнения следующих неравенств:

$$\sqrt{h/R} \ll 1, \quad \mu_i^0 \leq \sqrt{R/h}. \quad (2.12)$$

В результате приходим к системе уравнений устойчивости технической теории оболочек:

$$\begin{aligned} (BT_1)_\alpha + (AS_2)_\beta + S_1 A_\beta - B_\alpha T_2 &= 0, \\ (AT_2)_\beta + (BS_1)_\alpha + S_2 B_\alpha - A_\beta T_1 &= 0, \\ (BQ_1)_\alpha + (AQ_2)_\beta + AB[T_1(k_1 + \chi_1^0) + T_2(k_2 + \chi_2^0) + (S_1 + S_2)\tau^0 + \\ + T_1^0 \chi_1 + T_2^0 \chi_2 + (S_1^0 + S_2^0)\tau + \delta_{ik}(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2)] &= 0, \quad (2.13) \\ (BM_1)_\alpha + (AH_2)_\beta + A_\beta H_1 - B_\alpha M_2 - ABQ_1 &= 0, \\ (AM_2)_\beta + (BH_1)_\alpha + B_\alpha H_2 - A_\beta M_1 - ABQ_2 &= 0, \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{A} \left(\frac{w_\alpha}{A} \right)_\alpha + A_\beta \frac{w_\beta}{AB^2}, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \left(\frac{w_\beta}{B} \right)_\beta + B_\alpha \frac{w_\alpha}{BA^2}, \\ \omega_1 &= -\frac{w_\alpha}{A}, \quad \tau = \frac{1}{B} \left(\frac{w_\alpha}{A} \right)_\beta - B_\alpha \frac{w_\beta}{AB^2}, \quad \omega_2 = -\frac{w_\beta}{B}, \quad (2.14) \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \omega_1 \omega_1^0, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \omega_2 \omega_2^0, \quad \varepsilon_{12} = \gamma + \omega_1 \omega_2^0 + \omega_2 \omega_1^0. \end{aligned}$$

В системе (2.13) слагаемые, содержащие начальные деформации χ_i^0 , τ^0 , имеют одинаковый порядок с главными при

$$\chi_2^0 \sim \chi_1^0 \sim \tau^0 \sim k, \quad \omega_i^0 \sim \sqrt{hk}. \quad (2.15)$$

В этом случае в исходном состоянии изгибные деформации по величине сравнимы с тангенциальными, и их поэтому следует учитывать. При этом деформации χ_i^0 , τ^0 и углы поворотов ω_i^0 определяются выражениями (2.14), где смещение w следует заменить на w^0 .

Таким же образом упрощаются и выражения (1.4). Уравнения в этом случае будут отличаться от (2.13) третьим уравнением

$$\begin{aligned} (BQ_1)_\alpha + (AQ_2)_\beta + AB(k_1 T_1 + k_2 T_2) - \\ - [B(T_1^0 \omega_1 + T_1 \omega_1^0 + S_1^0 \omega_2 + S_1 \omega_2^0)]_\alpha - \\ - [A(T_2^0 \omega_2 + T_2 \omega_2^0 + S_2^0 \omega_1 + S_2 \omega_1^0)]_\beta - \delta_{ic} AB(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2) = 0. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Соответствующую систему упрощений следует принять и в граничных условиях. В частности, нелинейные условия (1.7),

(1.8) при местной потере устойчивости используются в форме

$$T_{1к} = T_{2к} = 0, \quad Q_{нк} - T_{1к}^0 \omega_1 - T_{2к}^0 \omega_2 - T_{1к} \omega_1^0 - T_{2к} \omega_2^0 = 0, \quad (2.17)$$

$$T_1 = S = 0, \quad Q_1 + H_\beta - T_1^0 \omega_1 - S^0 \omega_2 - T_1 \omega_1^0 - S \omega_2^0 = 0. \quad (2.18)$$

Рассмотрим волнообразование с коэффициентами изменчивости:

$$\mu_\alpha \sim 1, \quad \mu_\beta \gg 1. \quad (2.19)$$

Такая форма потери устойчивости характерна для недлинных оболочек при внешнем боковом давлении или кручении. В этом случае смещения и деформации нейтрального состояния существенно возрастают при дифференцировании по координате β и существенно не изменяются при дифференцировании по координате α .

Исследование уравнений устойчивости проведем так же, как это было сделано в начале данного параграфа. Сравнивая отдельные слагаемые в уравнениях (1.3), при условии выполнения оценки (2.15), снова приходим к системам (2.13) и (2.16). При этом слагаемые, зависящие от начальных деформаций χ_i^0 , τ^0 и углов поворота ω_i^0 , имеют одинаковый порядок с главными при

$$\begin{aligned} h\chi_1^0 &\sim hk \sqrt{hk}, & h\chi_2^0 &\sim hk, & h\tau^0 &\sim hk \sqrt{hk}, \\ \omega_1^0 &\sim hk, & \omega_2^0 &\sim (hk)^{3/4}, & \mu_1^0 &\sim \mu_2^0 \sim \sqrt{R/h}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Аналогичным образом можно показать, что уравнения технической теории оболочек применимы и в случае осесимметричной потери устойчивости с коэффициентами изменчивости:

$$\mu_\beta = 0, \quad \mu_\alpha \gg 1. \quad (2.21)$$

Итак, при рассмотренных формах местной потери устойчивости можно использовать систему уравнения технической теории оболочек.

Если использовать уравнения (2.7), (2.11) гл. III в смешанной форме и подстановку (1.1), то эту систему можно представить в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned} D\nabla^2 \nabla^2 w - T_1(k_1 + \chi_1^0) - T_2(k_2 + \chi_2^0) - (S_1 + S_2)\tau^0 - T_1^0 \chi_1 - T_2^0 \chi_2 - \\ - (S_1^0 + S_2^0)\tau + \delta_{1к}(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F + Eh(k_1 \chi_2 + k_2 \chi_1 + \chi_1 \chi_2^0 + \chi_2 \chi_1^0 - 2\tau\tau^0) = 0.$$

Здесь F — функция усилий, введенная равенствами (2.1) гл. III.

В системе, отнесенной к недеформированному состоянию, первое уравнение имеет вид

$$[D\nabla^2\nabla^2\omega - k_1T_1 - k_2T_2 - \delta_{ic}(q_1\omega_1 + q_2\omega_2)]AB + \\ + [B(T_1^0\omega_1 + T_1\omega_1^0 + S_1^0\omega_2 + S_1\omega_2^0)]_a + \\ + [(T_2^0\omega_2 + T_2\omega_2^0 + S_2^0\omega_1 + S_2\omega_1^0)]_b = 0. \quad (2.23)$$

Дальнейшее упрощение уравнений можно получить, отождествив метрику срединной поверхности с метрикой на плоскости ($A = B = 1$). Соответственно системам (2.13), (2.14), (2.22) получаем уравнения пологих оболочек:

$$T_{1a} + S_\beta = 0, \quad T_{2\beta} + S_a = 0, \\ M_{1aa} + 2H_{a\beta} + M_{2\beta\beta} + k_1T_1 + k_2T_2 + T_1^0\chi_1 + T_2^0\chi_2 + 2S^0\tau + \\ + T_1\chi_1^0 + T_2\chi_2^0 + 2S\tau^0 + \delta_{ik}(q_1\omega_1 + q_2\omega_2) = 0, \quad (2.24)$$

$$\chi_1 = \omega_{a\alpha}, \quad \chi_2 = \omega_{\beta\beta}, \quad \tau = \omega_{a\beta}, \quad \chi_1^0 = \omega_{a\alpha}^0, \\ \chi_2^0 = \omega_{\beta\beta}^0, \quad \tau^0 = \omega_{a\beta}^0, \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{11} = u_a - k_1\omega + \omega_a\omega_a^0, \quad \varepsilon_{22} = v_\beta - k_2\omega + \omega_\beta\omega_\beta^0, \\ \varepsilon_{12} = u_\beta + v_a + \omega_a^0\omega_\beta + \omega_\beta^0\omega_a,$$

$$D\nabla^4\omega - k_1F_{\beta\beta} - k_2F_{a\alpha} - T_1^0\omega_{a\alpha} - T_2^0\omega_{\beta\beta} - 2S^0\omega_{a\beta} - F_{\beta\beta}\omega_{a\alpha}^0 - \\ - F_{a\alpha}\omega_{\beta\beta}^0 + 2F_{a\beta}\omega_{a\beta}^0 + \delta_{ik}(q_1\omega_a + q_2\omega_\beta) = 0, \quad (2.26)$$

$$\nabla^4F + Eh(k_1\omega_{\beta\beta} + k_2\omega_{a\alpha} + \omega_{\beta\beta}\omega_{a\alpha}^0 + \omega_{a\alpha}\omega_{\beta\beta}^0 - 2\omega_{a\beta}\omega_{a\beta}^0) = 0.$$

Здесь α, β — размерные координаты.

В системе, отнесенной к недеформированному состоянию, третье уравнение системы (2.24) и первое уравнение системы (2.26) имеют вид

$$M_{1aa} + 2H_{a\beta} + M_{\beta\beta} + k_1T_1 + k_2T_2 - \\ - (T_1^0\omega_1 + T_1\omega_1^0 + S_1^0\omega_2 + S_1\omega_2^0)_a - \\ - (T_2^0\omega_2 + T_2\omega_2^0 + S_2^0\omega_1 + S_2\omega_1^0)_\beta - \delta_{ic}(q_1\omega_1 + q_2\omega_2) = 0, \quad (2.27)$$

$$D\nabla^4\omega - k_1F_{\beta\beta} - k_2F_{a\alpha} - (T_1^0\omega_a + T_1\omega_a^0 + S_1^0\omega_\beta + S_1\omega_\beta^0)_a - \\ - (T_2^0\omega_\beta + T_2\omega_\beta^0 + S_2^0\omega_a + S_2\omega_a^0)_\beta - \delta_{ic}(q_1\omega_a + q_2\omega_\beta) = 0.$$

В этих уравнениях слагаемые типа $T_{1a}\omega_a^0, S_{1a}\omega_\beta^0, T_{2\beta}\omega_\beta^0, S_{2\beta}\omega_a^0$ должны быть опущены, поскольку они соответствуют слагае-

мым $\delta q_1 \omega_\alpha^0$, $\delta q_2 \omega_\beta^0$, содержащим вариации нагрузки. Согласно концепции Эйлера эти вариации равны нулю — нагрузка считается стационарной. Эти слагаемые имеют второй порядок малости.

2. Общая потеря устойчивости *см.*

Рассмотрим случай потери устойчивости с образованием длинных волн в направлении одной из координат. Такой случай волнообразования, как известно, возможен для круговой цилиндрической оболочки. При этом функции, характеризующие нейтральное состояние, существенно уменьшаются при дифференцировании по координате α , так что $\mu_\alpha \ll 1$. Исследование уравнений (1.3) проведем так же, как и для случая местной потери устойчивости. Положим

$$A = B = R, \quad \alpha = \xi = xk, \quad \beta = \varphi = yk, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = k = 1/R.$$

Сравнивая слагаемые в уравнениях (1.3) и опуская несущественные из них, запишем уравнения устойчивости для данного типа выпучивания в следующей форме:

$$\begin{aligned} T_{1\xi} + S_\varphi + T_{1\xi}^0 e_2 &= 0, \\ T_{2\varphi} + S_\xi - kM_{2\varphi} + (T_2^0 - T_1^0) e_{1\varphi} - T_1 e_{1\varphi}^0 + S_\xi^0 e_2 + T_1 \gamma_\xi^0 &= 0, \\ T_2 + kM_{\varphi\varphi} + \\ + R(T_{1\xi}^0 \chi_1 + T_{2\xi}^0 \chi_2 + 2S^0 \tau + T_1 \chi_1^0 + T_2 \chi_2^0 + 2S\tau^0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где

$$e_{11} = e_1, \quad e_{22} = e_2 + \omega_\varphi \omega_\varphi^0, \quad e_{12} = \gamma + \omega_\varphi \omega_\xi^0, \quad M_2 = D\chi_2.$$

Подчеркнутые слагаемые в этих уравнениях имеют одинаковый порядок с главными при

$$\begin{aligned} \mu_\xi^0 &\sim \sqrt{R/h}, \quad R\chi_1^0 \sim hk, \quad R\chi_2^0 \sim 1, \quad R\tau^0 \sim \sqrt{hk}, \\ \gamma^0 &\sim hk \sqrt{hk}, \quad \omega_1^0 \sim hk \sqrt{hk}, \quad \omega_2^0 \sim hk. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В тех случаях, когда возможна потеря устойчивости как по длинным, так и по коротким волнам, уравнения устойчивости можно применять в следующей форме:

$$\begin{aligned} T_{1\xi} + S_\varphi + T_{1\xi}^0 e_2 + 2S^0 e_{1\varphi} &= 0, \\ T_{2\varphi} + S_\xi - kM_{2\varphi} + (T_2^0 - T_1^0) e_{1\varphi} - T_1 e_{1\varphi}^0 + \\ + S_\xi^0 e_2 + T_1 \gamma_\xi^0 + 2S^0 e_{2\xi} &= 0, \\ T_2 + k(M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\varphi} + M_{2\varphi\varphi}) + R[T_{1\xi}^0 \chi_1 + T_{2\xi}^0 \chi_2 + 2S^0 \tau + \\ + T_1 \chi_1^0 + T_2 \chi_2^0 + 2S\tau^0 + \delta_{ik}(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

При этом усилия и моменты выражаются через деформации согласно (4.4) гл. II. Соотношения между деформациями и смещениями можно использовать в такой форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + k^2 \omega_\xi \omega_\xi^0, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + k^2 \omega_\varphi \omega_\varphi^0, \\ \varepsilon_{12} &= \gamma + k^2 (\omega_\alpha \omega_\varphi^0 + \omega_\varphi \omega_\alpha^0), \\ \varepsilon_1 &= k u_\xi, & \varepsilon_2 &= k (v_\varphi - w), & \gamma &= k (u_\varphi + v_\xi), \\ \omega_1 &= -k \omega_\xi, & \omega_2 &= -k (\omega_\varphi + v), \\ \chi_1 &= k^2 \omega_\xi \xi, & \chi_2 &= k^2 (\omega_\varphi \varphi + w), & \tau &= k^2 (\omega_\varphi \xi + v_\xi). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Если потеря устойчивости происходит при

$$\mu_\alpha \ll 1, \quad \mu_\beta \gg 1 \quad (2.32)$$

(случай возможен при переменном по окружности давлении и большой длине оболочки), то в уравнениях (2.30) необходимо сохранять также и главные части слагаемых уравнений (1.3), содержащих $Q_2^0 \chi_2$, $Q_2 \chi_2^0$. В этом случае во второе уравнение (2.30) добавляется соответственно слагаемое

$$D (\chi_2 \chi_2^0)_\varphi. \quad (2.33)$$

Сделаем некоторые выводы из качественного исследования уравнений устойчивости при неоднородных напряженных состояниях. При местной форме выпучивания роль тангенциальных деформаций срединной поверхности незначительна. В этом случае, как и при однородных напряжениях, применимы уравнения устойчивости теории пологих оболочек. Точность этих уравнений определяется условиями (2.12).

При выпучивании оболочек с образованием длинных волн в направлении образующих (случай, возможный для длинных круговых цилиндрических оболочек) в уравнениях устойчивости следует учитывать некоторые слагаемые, содержащие в качестве множителей деформации срединной поверхности. При этом главными из них являются слагаемые, содержащие множителями деформации удлинений. Учет при составлении уравнений сдвига координатных линий приводит к появлению слагаемого $T_1 \gamma_\xi^0$ во втором уравнении (2.30), причем это слагаемое имеет одинаковый порядок с главными при условии (2.29).

Напряжения изгиба, как видно из полученных уравнений, сами по себе не оказывают существенного влияния на устойчивость оболочек. Моментность исходного состояния сказывается в появлении начальных изгибных деформаций, которые следует учитывать при условиях (2.15), (2.20).

При однородных напряженных состояниях система уравнений (2.30) имеет вид

$$\begin{aligned} T_{1\xi} + S_{\varphi} + 2S^0 e_{1\varphi} &= 0, \\ T_{2\varphi} + S_{\xi} - kM_{2\varphi} + (T_2^0 - T_1^0) e_{1\varphi} + 2S^0 e_{2\xi} &= 0, \\ T_2 + k(M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\varphi} + M_{2\varphi\varphi}) + \\ + R[T_1^0 \chi_1 + T_2^0 \chi_2 + 2S^0 \tau + \delta_{ik}(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$e_{11} = e_1 = k u_{\xi}, \quad e_{22} = e_2 = k(v_{\varphi} - \omega), \quad e_{12} = \gamma = k(u_{\varphi} + v_{\xi}). \quad (2.35)$$

Выведенные уравнения применимы к оболочкам произвольной длины. Из них можно получить известные формулы критических усилий для оболочек средней длины, а также формулы Саутуэлла — Тимошенко, Шверина, Бресса — Грасгофа для длинных оболочек. В то же время эти уравнения не намного сложнее уравнений Доннелла. Обычно подобные системы уравнений называют уравнениями типа Доннелла. Более сложные уравнения типа Доннелла при однородных состояниях в проекциях на недеформированные оси получены В. В. Болотиным [4.5]. Уравнения типа Доннелла для задачи устойчивости при внешнем давлении выводились Лу [5.7]. Уравнения Лу могут быть получены из уравнений (2.34) как частный случай. В расчетах длинных оболочек часто используют уравнения Флюгге [4.15] и Сандерса [2.16], которые значительно сложнее уравнений (2.34). Более сложные, чем (2.34), уравнения в смещениях были получены В. М. Даревским [5.2] из уравнений Лява. С помощью полученных в этом параграфе оценок величин и деформаций аналогичным образом можно упростить и уравнения, отнесенные к недеформированному состоянию оболочек. Для случая однородного исходного состояния анализ уравнений имеется в статье В. В. Болотина [4.5].

Уравнения, пригодные для исследования устойчивости цилиндрической оболочки и локальной устойчивости произвольных оболочек, могут быть получены из уравнений (2.30), если в них ввести слагаемые уравнений (2.24), (2.25), содержащие k_1 ,

$$\begin{aligned} T_{1\alpha} + S_{\beta} + T_{1\alpha}^0 e_2 + 2S^0 e_{1\beta} &= 0, \\ T_{2\beta} + S_{\alpha} - k_2 M_{2\beta} + (T_2^0 - T_1^0) e_{1\beta} - T_1 e_{1\beta}^0 + \\ + S_{\alpha}^0 e_2 + T_1 v_{\alpha}^0 + 2S^0 e_{2\alpha} &= 0, \\ k_1 T_2 + k_2 T_2 + M_{1\alpha\alpha} + 2H_{\alpha\beta} + M_{2\beta\beta} + T_1^0 \chi_1 + T_2^0 \chi_2 + 2S^0 \tau + \\ + T_1 \chi_1^0 + T_2 \chi_2^0 + 2S \tau^0 + \delta_{ik}(q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Деформации, изменения кривизн, усилия и моменты определяются согласно (2.25), (2.31) и выражений (4.4) гл. II соответственно.

§ 3. Вариационные уравнения

Для исследования устойчивости оболочек можно использовать энергетический критерий

$$\delta(\delta^2\Pi) = 0. \quad (3.1)$$

Ограничимся локальной устойчивостью оболочек. Для этого случая можно использовать уравнения теории пологих оболочек, полученные в гл. III. Выражение $\delta^2\Pi$ второй вариации можно получить, рассматривая два бесконечно близких равновесных состояния с компонентами

$$\begin{aligned} & \omega^0, \quad F^0, \quad q, \\ & \omega^0 + \omega, \quad F^0 + F, \quad q + 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в уравнения (4.1) — (4.5) гл. III, получаем: выражение второй вариации полной энергии

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi = & \iint \left\{ \frac{D}{2} [(\nabla^2\omega)^2 + 2(1-\nu)(\omega_{\alpha\beta}^2 - \omega_{\alpha\alpha}\omega_{\beta\beta})] - \right. \\ & - \frac{1}{2Eh} [(\nabla^2F)^2 + 2(1+\nu)(F_{\alpha\beta}^2 - F_{\alpha\alpha}F_{\beta\beta})] - k_2F_{\alpha\alpha}\omega - k_1F_{\beta\beta}\omega + \\ & + \frac{1}{2}(F_{\alpha\alpha}^0\omega_{\beta\beta}^2 + F_{\beta\beta}^0\omega_{\alpha\alpha}^2 - 2F_{\alpha\beta}^0\omega_{\alpha}\omega_{\beta}) + \omega_{\alpha}^0(F_{\beta\beta}\omega_{\alpha} - F_{\alpha\beta}\omega_{\beta}) + \\ & \left. + \omega_{\beta}^0(F_{\alpha\alpha}\omega_{\beta} - F_{\alpha\beta}\omega_{\alpha}) \right\} d\alpha d\beta; \end{aligned} \quad (3.3)$$

уравнения устойчивости и граничные условия в форме Бубнова:

$$\begin{aligned} & \iint (D\nabla^4\omega - k_2F_{\alpha\alpha} - k_1F_{\beta\beta} - F_{\beta\beta}^0\omega_{\alpha\alpha} - F_{\alpha\alpha}^0\omega_{\beta\beta} + 2F_{\alpha\beta}^0\omega_{\alpha\beta} - \\ & - F_{\beta\beta}^0\omega_{\alpha\alpha}^0 - F_{\alpha\alpha}^0\omega_{\beta\beta}^0 + 2F_{\alpha\beta}^0\omega_{\alpha\beta}^0) \delta\omega d\alpha d\beta = 0, \\ & \iint [\nabla^4F + Eh(k_1\omega_{\beta\beta} + k_2\omega_{\alpha\alpha} + \omega_{\alpha\alpha}^0\omega_{\beta\beta} + \\ & + \omega_{\beta\beta}^0\omega_{\alpha\alpha} - 2\omega_{\alpha\beta}^0\omega_{\alpha\beta})] \delta F d\alpha d\beta = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \int (Q_{n\kappa} - T_{1\kappa}^0\omega_1 - T_{2\kappa}^0\omega_2 - T_{1\kappa}\omega_1^0 - T_{2\kappa}\omega_2^0) \delta\omega ds = 0, \\ & \int G'_{\kappa} \delta\omega_{\nu} ds = 0, \quad \int T_{1\kappa} \delta u ds = 0, \quad \int T_{2\kappa} \delta v ds = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

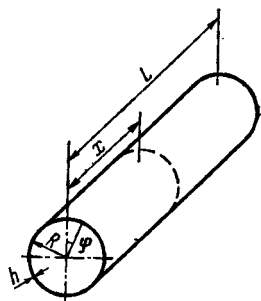
КРУГОВАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

Круговая цилиндрическая оболочка — важнейший элемент конструкций двигателя, самолетов, ракет, подводных лодок, различного рода резервуаров и т. д. Поэтому не удивительно, что большинство работ по устойчивости оболочек посвящено цилиндрическим оболочкам. Почти все принципиальные вопросы теории устойчивости оболочек были выявлены при изучении устойчивости цилиндрических оболочек. Это объясняется не только практической значимостью цилиндрических оболочек, но и тем обстоятельством, что цилиндрическая оболочка с геометрической стороны представляет собой, пожалуй, наиболее простой объект исследования из всего класса оболочек, а с точки зрения теории устойчивости — объект, в поведении которого наиболее полно и контрастно отразились все тонкости явления потери устойчивости.

Глава V

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Все уравнения цилиндрической круговой оболочки можно получить из общих уравнений, положив в них (рис. 5.1)



$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1/R,$$

$$A = B = R = \text{const},$$

$$\alpha = \xi = x k_2,$$

$$\beta = \varphi = y k_2.$$

§ 1. Исходное состояние оболочки

Рис. 5.1 Круговая цилиндрическая оболочка

Исходное состояние оболочки в общем случае следует определять по нелиней-

ной теории. Выпишем основные уравнения, выведенные в главах II и III:

уравнения равновесия (2.14), (2.15) гл. II:

$$\begin{aligned} & [T_1(1 + \varepsilon_2)]_{\xi} + [S_2(1 + \varepsilon_1)]_{\varphi} - T_2(\varepsilon_{2\xi} - \gamma_{\varphi}) + S_1\varepsilon_{1\varphi} - \\ & - R[Q_1\chi_1 + Q_2\tau - q_1(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ik}(q_2\gamma_2 + q\omega_1)] = 0, \\ & [T_2(1 + \varepsilon_1)]_{\varphi} + [S_1(1 + \varepsilon_2)]_{\xi} - T_1(\varepsilon_{1\varphi} - \gamma_{\xi}) + S_2\varepsilon_{2\xi} - Q_2 - \\ & - R[Q_2\chi_2 + Q_1\tau - q_2(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ik}(q_1\gamma_1 + q\omega_2)] = 0, \\ & [Q_1(1 + \varepsilon_2)]_{\xi} + [Q_2(1 + \varepsilon_1)]_{\varphi} + T_2 + R[T_1\chi_1 + T_2\chi_2 + \\ & + (S_1 + S_2)\tau + q(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ik}(q_1\omega_1 + q_2\omega_2)] = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & M_{1\xi} + H_{2\varphi} - RQ_1 = 0, \quad M_{2\varphi} + H_{1\xi} - RQ_2 = 0; \\ & T_{1\xi}^* + S_{2\varphi}^* + R[q_1(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ic}(q_2\gamma_2 + q\omega_1)] = 0, \\ & T_{2\varphi}^* + S_{1\xi}^* - Q_2 + R[q_2(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ic}(q_1\gamma_2 + q\omega_2)] = 0, \\ & Q_{1\xi}^* + Q_{2\varphi}^* + T_2^* + R[q(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \delta_{ic}(q_1\omega_1 + q_2\omega_2)] = 0, \\ & M_{1\xi} + H_{2\varphi} - RQ_1 = 0, \quad M_{2\varphi} + H_{1\xi} - RQ_2 = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

здесь

$$\begin{aligned} T_1^* &= T_1(1 + \varepsilon_2) + S_1\gamma_2 + Q_1\omega_1, \quad S_1^* = S_1(1 + \varepsilon_2) + T_1\gamma_1 + Q_1\omega_2, \\ T_2^* &= T_2(1 + \varepsilon_1) + S_2\gamma_1 + Q_2\omega_2, \quad S_2^* = S_2(1 + \varepsilon_1) + T_2\gamma_2 + Q_2\omega_1, \\ Q_1^* &= Q_1(1 + \varepsilon_2) - T_1\omega_1 - S_1\omega_2, \quad Q_2^* = Q_2(1 + \varepsilon_1) - T_2\omega_2 - S_2\omega_1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= k_2 u_{\xi}, \quad \varepsilon_2 = k_2(v_{\varphi} - w), \quad \gamma = k_2(u_{\varphi} + v_{\xi}), \\ \chi_1 &= k_2^2 \omega_{\xi\xi}, \quad \chi_2 = k_2^2(w_{\varphi\varphi} + w), \quad \tau = k_2^2(w_{\varphi\xi} + v_{\xi}), \\ \gamma_1 &= k_2 v_{\xi}, \quad \gamma_2 = k_2 u_{\varphi}, \quad \omega_1 = -k_2 \omega_{\xi}, \quad \omega_2 = -k_2(w_{\varphi} + v), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\delta_{ik} = 0$, $\delta_{ic} = 1$ при следящей нагрузке и $\delta_{ic} = 0$, $\delta_{ik} = 1$ — при консервативной нагрузке;

соотношения упругости:

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad T_2 = K(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \\ S_1 &= S_2 = S = K\nu\varepsilon_{12}, \quad H_1 = H_2 = H = -2D\nu_1\tau, \\ M_1 &= -D(\chi_1 + \nu\chi_2), \quad M_2 = -D(\chi_2 + \nu\chi_1), \\ K &= \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \nu_1 = \frac{1 - \nu}{2}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

кинематические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + 1/2(\varepsilon_1^2 + \gamma_1^2 + \omega_1^2), \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + 1/2(\varepsilon_2^2 + \gamma_2^2 + \omega_2^2), \\ \varepsilon_{12} &= \gamma + \varepsilon_1\gamma_2 + \varepsilon_2\gamma_1 + \omega_1\omega_2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.1) — (1.6) дополняется граничными условиями. На поперечных краях замкнутой оболочки согласно

(5.20) гл. II

$$T_1 = \Phi_v, \quad S = \Phi_t, \quad Q_1 + k_2 H_\Phi = \Phi_n, \quad M_1 = G, \quad (1.7)$$

где $\Phi_v, \Phi_t, \Phi_n, G$ — контурные значения нормальной, сдвигающей, поперечной сил и изгибающего момента. Условия на образующих заменяются условиями периодичности функций. Граничные условия в смещениях соответственно

$$u = u_k, \quad v = v_k, \quad w = w_k, \quad w_\xi = R\gamma_k, \quad (1.8)$$

где γ_k — угол поворота нормали к контуру; u_k, v_k, w_k — смещения точек контура. Векторы Φ_v, Φ_t, Φ_n направлены по ортам деформированного контура, что соответствует следящей нагрузке.

Если вектор контурной нагрузки (5.22) гл. II разложен по ортам недеформированного контура, то согласно (5.24) гл. II

$$\begin{aligned} T_{1n} &= T_1 + S\gamma_2 + (Q_1 + k_2 H_\Phi) \omega_1, \\ T_{2n} &= S + T_1 \gamma_1 + (Q_1 + k_2 H_\Phi) \omega_2, \\ Q_{nn} &= Q_1 + k_2 H_\Phi - T_1 \omega_1 - S \omega_2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где T_{1n}, T_{2n}, Q_{nn} — продольная, сдвигающая и поперечная краевые нагрузки, действующие в направлении ортов e_i . Нагрузка считается консервативной.

Уравнения (1.1), (1.2) сложны, они содержат много малых членов и могут быть упрощены путем отбрасывания этих членов. Во-первых, можно опустить все нелинейные члены, содержащие компоненты тангенциальной деформации и углы поворотов элементов в срединной поверхности, и считать смещения u и v значительно меньше смещения w . Во-вторых, можно опустить произведения поперечных сил на компоненты изгибной деформации.

В результате из систем (1.1), (1.2) получаем уравнения:

$$\begin{aligned} T_{1\xi} + S_\Phi + Rq_1 + \delta_{ik} q w_\xi &= 0, \\ T_{2\Phi} + S_\xi - Q_2 + Rq_2 + \delta_{ik} q w_\Phi &= 0, \\ k_2 (M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\Phi} + M_{2\Phi\Phi}) + T_2 + k_2 (T_1 w_{\xi\xi} + T_2 w_{\Phi\Phi} + 2S w_{\xi\Phi}) + \\ &+ Rq - \delta_{ik} (q_1 w_\xi + q_2 w_\Phi) = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} T_{1\xi} + S_\Phi + Rq_1 - \delta_{ic} q w_\xi &= 0, \\ T_{2\Phi} + S_\xi - Q_2 + Rq_2 - \delta_{ic} q w_\Phi &= 0, \\ k_2 (M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\Phi} + M_{2\Phi\Phi}) + T_2 + k_2 [(T_1 w_\xi + S w_\Phi)_\xi + \\ &+ (T_2 w_\Phi + S w_\xi)_\Phi] + Rq + \delta_{ic} (q_1 w_\xi + q_2 w_\Phi) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

При этом

$$\begin{aligned}\chi_2 &= k_2^2 \omega_{\varphi\varphi}, & \tau &= k_2^2 \omega_{\varphi\xi}, & \omega_2 &= -k_2 \omega_{\varphi}, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + 1/2 \omega_1^2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + 1/2 \omega_2^2, & \varepsilon_{12} &= \gamma + \omega_1 \omega_2.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Если нагрузка q следящая, то удобно использовать уравнения (1.10), отнесенные к деформированному состоянию оболочки; если нагрузка q консервативная — уравнения (1.11), отнесенные к недеформированному состоянию. Граничные условия (1.9) в этом случае также упрощаются:

$$T_{1n} = T_1, \quad T_{2n} = S, \quad Q_{nn} = Q_1 + k_2 H_{\varphi} - T_1 \omega_1 - S \omega_2. \quad (1.13)$$

Перепишем систему (1.10) для случая следящей ($\delta_{ik} = 0$) нагрузки q

$$\begin{aligned}T_{1\xi} + S_{\varphi} + Rq_1 &= 0, & T_{2\varphi} + S_{\xi} - Q_2 + Rq_2 &= 0, \\ M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\varphi} + M_{2\varphi\varphi} + RT_2 + T_2 \omega_{\varphi\varphi} + T_1 \omega_{\xi\xi} + 2S \omega_{\xi\varphi} + \\ &+ qR^2 - \delta_{ik} R(q_1 \omega_{\xi} + q_2 \omega_{\varphi}) &= 0.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Первые два уравнения стали линейными, третье уравнение нелинейное.

В случае осесимметричного исходного состояния уравнения (1.14) сводятся к одному уравнению относительно функции прогиба. Полагая для этого случая

$$q_2 = v = S = H = Q_2 = \gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \omega_2 = \tau = \chi_2 = \varepsilon_{12} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 = k_2 u_{\xi} - 1/2 \omega_{\xi}^2 k_2^2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 = -k_2 \omega, \\ M_1 &= -D \chi_1 = -D k_2^2 \omega_{\xi\xi}, \\ \chi_1 &= k_2^2 \omega_{\xi\xi}, & Q_1 &= k_2 M_{1\xi}.\end{aligned}\quad (1.15)$$

Система уравнений (1.14) принимает вид

$$\begin{aligned}T_{1\xi} + Rq_1 &= 0, \\ D k_2^2 \omega_{\xi\xi\xi\xi} - RT_2 - T_1 \omega_{\xi\xi} - qR^2 + \delta_{ik} q_1 R \omega_{\xi} &= 0.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Из первого уравнения находим

$$T_1 = -R \int q_1 d\xi + C, \quad (1.17)$$

где постоянная C определяется из граничных условий. Если, например, на краях оболочки приложены равномерно распределенные сжимающие продольные усилия N , то при $x = 0$ $T_1 = -N$, $C = -N$. Если края свободны от усилий, то $C = 0$. Из

соотношений (1.5) находим

$$\varepsilon_{11} = T_1/K - \nu \varepsilon_{22} = T_1/K + \nu k_2 w,$$

откуда получаем

$$T_2 = \nu T_1 + Eh \varepsilon_2 = \nu T_1 - Eh k_2 w. \quad (1.18)$$

После этого второе уравнение (1.16) приводится к виду

$$Dk_2^2 w_{\xi\xi\xi\xi} - T_1 w_{\xi\xi} + \delta_{ik} q_1 R w_{\xi} + Eh w = q R^2 + \nu R T_1. \quad (1.19)$$

Это так называемое уравнение «нелинейного краевого эффекта». Фактически это уравнение квазилинейное. От обычного уравнения линейного краевого эффекта оно отличается наличием членов с первой и второй производными прогиба. Эти члены не позволяют получать решение наложением решений. Уравнение (1.19) имеет переменные коэффициенты и может быть решено численно. При постоянной нагрузке q_1 уравнение легко интегрируется в замкнутом виде.

При неосесимметричном исходном состоянии решение уравнений связано с большими математическими трудностями. Обычно для решения практических задач производят дальнейшие упрощения этих уравнений. Одно из упрощений связано с отбрасыванием поперечной силы Q_2 во втором уравнении. В таком случае получаются уравнения теории оболочек. В смешанной форме эти уравнения, отнесенные к деформированным осям, при следящей нагрузке ($q_1 = q_2 = 0$) имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 &= D \nabla^4 w - R F_{\xi\xi} - F_{\varphi\varphi} w_{\xi\xi} - F_{\xi\xi} w_{\varphi\varphi} + 2 F_{\xi\varphi} w_{\xi\varphi} - q R^4 = 0, \\ L_2 &= \nabla^4 F + Eh (R w_{\xi\xi} + w_{\xi\xi} w_{\varphi\varphi} - w_{\xi\varphi}^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Здесь

$$T_1 = k_2^2 F_{\varphi\varphi}, \quad T_2 = k_2^2 F_{\xi\xi}, \quad S = -k_2^2 F_{\xi\varphi}.$$

Уравнения (1.20) могут быть решены приближенными методами. Обычно используют методы Бубнова, малого параметра, последовательных приближений, метод сеток и различные методы линеаризации [5.1]. Можно использовать также идею разделения напряженного состояния на основное и напряженное состояние типа краевого эффекта. Основное состояние определяется по безмоментной теории из уравнений:

$$T_{1\xi} + S_{\varphi} + R q_1 = 0, \quad T_{2\varphi} + S_{\xi} + R q_2 = 0, \quad T_2 + R q = 0. \quad (1.21)$$

Напряженное состояние типа краевого эффекта приближенно можно найти из линеаризованной системы (1.20)

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w - R F_{\xi\xi} - R^2 (T_{16} w_{\xi\xi} + T_{26} w_{\varphi\varphi} + 2 S_6 w_{\xi\varphi}) &= 0, \\ \nabla^4 F + Eh R w_{\xi\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Безмоментные усилия $T_{1\delta}$, $T_{2\delta}$, S_δ определяются решением системы (1.21).

Другой вариант упрощений нелинейных уравнений связан с использованием полубезмоментной теории. Вместо системы (1.14) в этом случае имеем нелинейные уравнения ($q_1 = q_2 = 0$):

$$\begin{aligned} T_{1\xi} + S_\varphi &= 0, \quad T_{2\varphi} + S_\xi - k_2 M_{2\varphi} = 0, \\ M_{2\varphi} + RT_2 + T_2(\omega_{\varphi\varphi} + \omega) + T_1\omega_{\xi\xi} + 2S\omega_{\xi\varphi} + qR^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Введя функцию усилий F

$$T_1 = k_2^2 F_{\varphi\varphi}, \quad T_2 - k_2 M_2 = k_2^2 F_{\xi\xi}, \quad S = -k_2^2 F_{\xi\varphi}, \quad (1.24)$$

сведем систему (1.23) к одному уравнению

$$\begin{aligned} M_{2\varphi\varphi} + M_2 + k_2 F_{\xi\xi} + k_2^2 [(F_{\xi\xi} + RM_2)(\omega_{\varphi\varphi} + \omega) + \\ + F_{\varphi\varphi}\omega_{\xi\xi} - 2F_{\xi\varphi}\omega_{\xi\varphi}] + qR^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Второе уравнение получается из уравнения неразрывности (1.20)

$$(k_2/K)F_{\varphi\varphi\varphi} + \omega_{\xi\xi} - k_2(\omega_{\xi\varphi}^2 - \omega_{\xi\xi}\omega_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (1.26)$$

Опуская в (1.25) малое слагаемое $M_2\chi_2$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} Dk_2^2(\omega_{\varphi\varphi\varphi} + 2\omega_{\varphi\varphi} + \omega) - k_2 F_{\xi\xi} - \\ - k_2^2 [F_{\xi\xi}(\omega_{\varphi\varphi} + \omega) + F_{\varphi\varphi}\omega_{\xi\xi} - 2F_{\xi\varphi}\omega_{\xi\varphi}] - qR^2 = 0, \\ F_{\varphi\varphi\varphi} + K(R\omega_{\xi\xi} + \omega_{\xi\xi}\omega_{\varphi\varphi} - \omega_{\xi\varphi}^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Если разделить напряженное состояние на безмоментное и моментное, то для определения моментного состояния эту систему, так же как и систему (1.20), можно линеаризовать

$$\begin{aligned} Dk_2^2(\omega_{\varphi\varphi\varphi} + \{2\omega_{\varphi\varphi} + \omega\}) - k_2 F_{\xi\xi} - T_{1\delta}\omega_{\xi\xi} - T_{2\delta}(\omega_{\varphi\varphi} + \{\omega\}), \\ - S_{\delta}\omega_{\xi\varphi} = 0, \quad F_{\varphi\varphi\varphi} + EhR\omega_{\xi\xi} = 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где усилия безмоментного состояния определяются из решения системы (1.21).

В системе (1.28), в отличие от (1.22), имеются слагаемые в фигурных скобках, которые необходимо удерживать при деформации оболочки с малым числом волн по окружности. Такая деформация возможна при нагружении оболочки переменным по окружности давлением. Вводя члены в фигурных скобках в уравнения (1.22), получаем систему уравнений, пригодную как для определения моментных состояний типа краевого

эффекта, так и состояний с малым показателем изменчивости по окружности

$$\begin{aligned}
 k_2^2 D (\nabla^4 w + \{2w_{\varphi\varphi} + w\}) - k_2 F_{\xi\xi} - T_{16} w_{\xi\xi} - \\
 - T_{26} (w_{\varphi\varphi} + \{w\}) - 2S_6 w_{\xi\varphi} = 0, \quad (1.29) \\
 \nabla^4 F + EhR w_{\xi\xi} = 0.
 \end{aligned}$$

При однородных напряженных состояниях решение этих уравнений не представляет большого труда. При неоднородных усилиях безмоментного состояния эти уравнения имеют переменные коэффициенты и могут быть решены приближенно методами Бубнова, Фурье, конечных разностей, последовательных приближений и т. д.

§ 2. Уравнения устойчивости

Общие уравнения устойчивости следуют из уравнений (1.3) гл. IV:

$$\begin{aligned}
 T_{1\xi} + S_{\varphi} + X = 0, \quad T_{2\varphi} + S_{\xi} - Q_2 + Y = 0, \\
 Q_{1\xi} + Q_{2\varphi} + T_2 + Z = 0, \quad (2.1) \\
 Q_1 = k_2 (M_{1\xi} + H_{\varphi}), \quad Q_2 = k_2 (M_{2\varphi} + H_{\xi}).
 \end{aligned}$$

Здесь имеем:

для системы, отнесенной к недеформированным осям:

$$\begin{aligned}
 X &= T_{1\xi}^* + S_{2\varphi}^* + Rq_1^*, \\
 Y &= T_{2\varphi}^* + S_{1\xi}^* - Q_2^* + Rq_2^*, \quad (2.2) \\
 Z &= Q_{1\xi}^* + Q_{2\varphi}^* + T_2^* + Rq^*,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1^* &= T_1^0 \varepsilon_2 + T_1^0 \varepsilon_2^0 + S_1^0 \gamma_2 + S_1^0 \gamma_2^0 + Q_1^0 \omega_1 + Q_1^0 \omega_1^0, \\
 T_2^* &= T_2^0 \varepsilon_1 + T_2^0 \varepsilon_1^0 + S_2^0 \gamma_1 + S_2^0 \gamma_1^0 + Q_2^0 \omega_2 + Q_2^0 \omega_2^0, \\
 S_1^* &= S_1^0 \varepsilon_2 + S_1^0 \varepsilon_2^0 + T_1^0 \gamma_1 + T_1^0 \gamma_1^0 + Q_1^0 \omega_2 + Q_1^0 \omega_2^0, \\
 S_2^* &= S_2^0 \varepsilon_1 + S_2^0 \varepsilon_1^0 + T_2^0 \gamma_2 + T_2^0 \gamma_2^0 + Q_2^0 \omega_1 + Q_2^0 \omega_1^0, \\
 Q_1^* &= Q_1^0 \varepsilon_2 + Q_1^0 \varepsilon_2^0 - T_1^0 \omega_1 - T_1^0 \omega_1^0 - S_1^0 \omega_2 - S_1^0 \omega_2^0, \quad (2.3) \\
 Q_2^* &= Q_2^0 \varepsilon_1 + Q_2^0 \varepsilon_1^0 - T_2^0 \omega_2 - T_2^0 \omega_2^0 - S_2^0 \omega_1 - S_2^0 \omega_1^0, \\
 q_1^* &= q_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_1^0) + \delta_{ic} (q_2 \gamma_2 + q \omega_1), \\
 q_2^* &= q_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ic} (q_1 \gamma_1 + q \omega_2), \\
 q^* &= q (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \delta_{ic} (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2);
 \end{aligned}$$

для системы, отнесенной к деформированным осям:

$$\begin{aligned}
 X &= (T_1^0 \varepsilon_2 + T_1 \varepsilon_2^0)_{\xi} + (S_2^0 \varepsilon_1 + S_2 \varepsilon_1^0)_{\varphi} + T_2^0 (\gamma_{\varphi} - \varepsilon_{2\xi}) + \\
 &\quad + T_2 (\gamma_{\varphi}^0 - \varepsilon_{2\xi}^0) + S_1^0 \varepsilon_{1\varphi} + S_1 \varepsilon_{1\varphi}^0 - R [Q_1^0 \chi_1 + Q_1 \chi_1^0 + \\
 &\quad + Q_2^0 \tau + Q_2 \tau^0 - q_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ik} (q_2 \gamma_2 + q \omega_1)], \\
 Y &= (T_2^0 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_1^0)_{\varphi} + (S_1^0 \varepsilon_2 + S_1 \varepsilon_2^0)_{\xi} + T_1^0 (\gamma_{\xi} - \varepsilon_{1\varphi}) + \\
 &\quad + T_1 (\gamma_{\xi}^0 - \varepsilon_{1\varphi}^0) + S_2^0 \varepsilon_{2\xi} + S_2 \varepsilon_{2\xi}^0 - R [Q_2^0 \chi_2 + Q_2 \chi_2^0 + \\
 &\quad + Q_1^0 \tau + Q_1 \tau^0 - q_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ik} (q_1 \gamma_1 + q \omega_2)], \quad (2.4) \\
 Z &= (Q_1^0 \varepsilon_2 + Q_1 \varepsilon_2^0)_{\xi} + (Q_2^0 \varepsilon_1 + Q_2 \varepsilon_1^0)_{\varphi} + R [T_1^0 \chi_1 + T_1 \chi_1^0 + \\
 &\quad + T_2^0 (\chi_2 + k_2 \varepsilon_1) + T_2 (\chi_2^0 + k_2 \varepsilon_1^0) + (S_1^0 + S_2^0) \tau + \\
 &\quad + (S_1 + S_2) \tau^0 + q (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \delta_{ik} (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2)].
 \end{aligned}$$

Как и раньше, $\delta_{ic} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ при следящей нагрузке; $\delta_{ic} = 0$, $\delta_{ik} = 1$ при консервативной нагрузке. При этом

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= k_2 \mu_{\xi}, \quad \varepsilon_2 = k_2 (v_{\varphi} - w), \quad \gamma = k_2 (\mu_{\varphi} + v_{\xi}), \\
 \chi_1 &= k_2^2 \omega_{\xi\xi}, \quad \chi_2 = k_2^2 (\omega_{\varphi\varphi} + w), \quad \tau = k_2^2 (\omega_{\varphi\xi} + v_{\xi}), \\
 \omega_1 &= -k_2 w_{\xi}, \quad \omega_2 = -k_2 (w_{\varphi} + v), \quad \gamma_1 = k_2 v_{\xi}, \quad \gamma_2 = k_2 \mu_{\varphi};
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 T_1 &= K (\varepsilon_{11} + v \varepsilon_{22}), \quad T_2 = K (\varepsilon_{22} + v \varepsilon_{11}), \\
 S_1 &= S_2 = S = K v_1 \varepsilon_{12}, \quad H_1 = H_2 = H = -2D v_1 \tau, \\
 M_1 &= -D (\chi_1 + v \chi_2), \quad M_2 = -D (\chi_2 + v \chi_1);
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_1^0 \varepsilon_1 + \gamma_1^0 \gamma_1 + \omega_1^0 \omega_1, \\
 \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \varepsilon_2^0 \varepsilon_2 + \gamma_2^0 \gamma_2 + \omega_2^0 \omega_2, \\
 \varepsilon_{12} &= \gamma + \varepsilon_1^0 \gamma_2 + \gamma_2^0 \varepsilon_1 + \varepsilon_2^0 \gamma_1 + \varepsilon_2 \gamma_1^0 + \omega_1^0 \omega_2 + \omega_1 \omega_2^0.
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Величины с нуликами, характеризующие исходное состояние, определяются из решения уравнений предыдущего параграфа.

Упрощенная система уравнений устойчивости (2.30) гл. IV записывается без изменений:

$$\begin{aligned}
 T_{1\xi} + S_{\varphi} + T_{1\xi}^0 \varepsilon_2 + 2S^0 \varepsilon_{1\varphi} &= 0, \\
 T_{2\varphi} + S_{\xi} - k_2 M_{2\varphi} + (T_2^0 - T_1^0) \varepsilon_{1\varphi} - T_1^0 \varepsilon_{1\varphi}^0 + S_{\xi}^0 \varepsilon_2 + 2S^0 \varepsilon_{2\xi} + \\
 &\quad + T_1 \gamma_{\xi}^0 + D (\chi_2 \chi_2^0)_{\varphi} = 0, \\
 T_2 + k_2 (M_{1\xi\xi} + 2H_{\xi\varphi} + M_{2\varphi\varphi}) + R [T_1^0 \chi_1 + T_2^0 \chi_2 + 2S^0 \tau + \\
 &\quad + T_1 \chi_1^0 + T_2 \chi_2^0 + 2S \tau^0 + \delta_{ik} (q_1 \omega_1 + q_2 \omega_2)] = 0,
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

при этом

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= k_2 u_{\xi} + k_2^2 \omega_{\xi}^0 \omega_{\xi} = (T_1 - \nu T_2)/K(1 - \nu^2), \\ \varepsilon_{22} &= k_2 (v_{\varphi} - w) + k_2^2 \omega_{\varphi}^0 \omega_{\varphi} = (T_2 - \nu T_1)/K(1 - \nu^2), \\ \varepsilon_{12} &= k_2 (u_{\varphi} + v_{\xi}) + k_2^2 (\omega_{\xi}^0 \omega_{\varphi} + \omega_{\varphi}^0 \omega_{\xi}) = S/K\nu_1, \\ \chi_1^0 &= k_2^2 \omega_{\xi\xi}^0, \quad \chi_2^0 = k_2^2 \omega_{\varphi\varphi}^0, \quad \tau^0 = k_2^2 \omega_{\xi\varphi}^0. \end{aligned}$$

Эта система при однородных напряженных состояниях в смещениях имеет вид

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} + \nu_2 u_{\xi\varphi} + \nu_1 u_{\varphi\varphi} - \nu w_{\xi} + \{t_3^0 u_{\xi\varphi}\} &= 0, \\ v_{\varphi\varphi} + \nu_2 u_{\xi\varphi} + \nu_1 v_{\xi\xi} - w_{\varphi} + \{\varepsilon (w_{\varphi\varphi} + w)_{\varphi} + \\ &+ (t_2^0 - t_1^0) u_{\xi\varphi} + t_3^0 (v_{\varphi} - k_2 w)_{\xi}\} = 0, \quad (2.9) \\ K(w - v_{\varphi} - \nu u_{\xi}) + k_2^2 D(\nabla^4 w + \{w_{\varphi\varphi}\}) - T_1^0 \omega_{\xi\xi} - \\ - T_2^0 (w_{\varphi\varphi} + \{w\}) - 2S^0 (w_{\xi\varphi} + \{v_{\xi}\}) - \\ - \delta_{ik} R[q_1 w_{\xi} + q_2 (w_{\varphi} + v)] &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} t_1^0 &= \frac{T_1^0}{K}, \quad t_2^0 = \frac{T_2^0}{K}, \quad t_3^0 = \frac{2S^0}{K}, \quad K = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \\ \varepsilon &= \frac{h^2}{12R^2}, \quad \nu_1 = \frac{1 - \nu}{2}, \quad \nu_2 = \frac{1 + \nu}{2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Системы (2.8), (2.9) можно записать в смешанной форме через функцию усилий и прогиб. Если для длинных оболочек не учитывать исходных деформаций и считать постоянными продольные и касательные усилия, действующие в них, то при следящей нагрузке уравнения будут иметь вид [25.4]

$$\begin{aligned} D[\nabla^4 w + \{k_2^2 (2w_{yy} + k_2^2 w)\}] - k_2 F_{xx} + \{k_2 F_{yy} (T_2^0 - T_1^0)/Eh\} - \\ - T_1^0 w_{xx} - T_2^0 (w_{yy} + \{k_2^2 w\}) - 2S^0 (w_{xy} + \{k_2^2 \int w_x dy\}) - \\ - F_{yy} w_{xx}^0 - F_{xx} w_{yy}^0 + 2F_{xy} w_{xy}^0 = 0, \\ \nabla^4 F + Fh(k_2 w_{xx} + w_{xx} w_{yy}^0 + w_{yy} w_{xx}^0 - 2w_{xy} w_{xy}^0) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь

$$F_{yy} = T_1, \quad F_{xy} = -S, \quad F_{xx} = T_2 + \{k_2 M_2 + (T_1^0 - T_2^0) \varepsilon_1\}. \quad (2.12)$$

При однородных исходных состояниях уравнения (2.11) записываются в несвязанной форме

$$\begin{aligned} \nabla^4 F = & -Ehk_2 w_{xx}, \\ \nabla^4 (DV^4 w - T_1^0 w_{xx} - T_2^0 w_{yy} - 2S^0 w_{xy}) + & Ehk_2^2 w_{xxxx} + \\ + k_2^2 \{ D(2w_{yy} + k_2^2 w)_{yyyy} + T_1^0 w_{xxyy} - T_2^0 (w_{xx} + w_{yy})_{yy} - & \\ - 2S^0 w_{xyyy} \} = & 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

или

$$\begin{aligned} \nabla^4 F = & -Ehk_2 w_{xx}, \\ D\nabla^4 w - T_1^0 w_{xx} - T_2^0 w_{yy} - 2S^0 w_{xy} + Ehk_2^2 \nabla^{-4} w_{xxxx} + & \\ + k_2^2 \left\{ D(2w_{yy} + k_2^2 w) + (T_1^0 - T_2^2) \int \int w_{xx} dy dy - \right. & \\ \left. - T_2^0 w - 2S^0 \int w_x dy \right\} = & 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь ∇^{-4} — обратный оператор, так что

$$\nabla^{-4} \nabla^4 = 1.$$

При локальной потере устойчивости в уравнениях следует опустить слагаемые в фигурных скобках. Уравнения для длинных цилиндрических оболочек следуют из уравнений (2.13), (2.14), если в операторе ∇^4 положить $w_{yy} \gg w_{xx}$.

Считая напряженное состояние однородным, получаем

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^8 w}{\partial y^8} + 2k_2^2 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + k_2^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + Ehk_2^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\ - T_1^0 \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} - k_2^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - T_2^0 \left[\frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + k_2^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] - \\ - 2S^2 \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x \partial y^5} + k_2^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2k_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2^4 w \right) + Ehk_2^2 \int \int \int \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dy^4 - \\ - T_1^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_2^2 \int \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy^2 \right) - T_2^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2^2 \int \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy^2 \right) - \\ - 2S^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k_2^2 \int \frac{\partial w}{\partial x} dy \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

функция F при этом связана с w уравнением

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -Ehk_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.17)$$

Смещения u и v могут быть выражены через w из первых двух уравнений (2.9). Дифференцируя второе уравнение по x , y и исключая из него v с помощью первого уравнения, находим с точностью до малых слагаемых

$$R\nabla^4 u = -\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (2.18)$$

Аналогично получаем

$$R\nabla^4 v = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}. \quad (2.19)$$

Уравнения (2.15)–(2.17) по форме совпадают с уравнениями полубезмоментной теории оболочек.

Для записи граничных условий при использовании уравнений (2.11) необходимо выразить смещения u и v через функции w и F . Из (2.7) имеем, например, для случая осесимметричного исходного состояния

$$\begin{aligned} v_\varphi &= w + (F_{\xi\xi} - \nu F_{\varphi\varphi})/EhR, \\ u_{\varphi\varphi} &= -[(2 + \nu)F_{\xi\varphi\varphi} + F_{\xi\xi\xi} + EhRw_\xi]/EhR - k_2 w_\xi^0 w_{\varphi\varphi}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Уравнения устойчивости в форме Бубнова запишем согласно уравнениям (3.1)–(3.5) гл. IV:

$$\begin{aligned} \iint (D\nabla^4 w - k_2 F_{xx} - T_2^0 w_{xx} - T_2^0 w_{yy} - 2S^0 w_{xy} - F_{yy} w_{xx} - \\ - F_{xx} w_{yy}^0 + 2F_{xy} w_{xy}^0) \delta w \, dx \, dy = 0, \quad (2.21) \\ \iint [\nabla^4 F + Fh(k_2 w_{xx} + w_{xx} w_{yy}^0 + w_{yy} w_{xx}^0 - 2w_{xy} w_{xy}^0)] \times \\ \times \delta F \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$

Энергетический критерий устойчивости

$$\delta(\delta^2 \Pi) = 0, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \iint \{ D[(w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1 - \nu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2)] - \\ - (1/Eh)[(F_{xx} + F_{yy})^2 + 2(1 + \nu)(F_{xy}^2 - F_{xx} F_{yy})] - 2F_{xx} k_2 w + \\ + T_2^0 w_y^2 + T_1^0 w_x^2 + 2S^0 w_x w_y + 2w_x^0 (F_{yy} w_x - F_{xy} w_y) + \\ + 2w_y^0 (F_{xx} w_y - F_{xy} w_x) \} \, dx \, dy. \quad (2.23) \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$M_1 \delta w_x = 0, \quad F_{yy} \delta u = 0, \quad F_{xy} \delta v = 0, \quad Q \delta w = 0. \quad (2.24)$$

Г л а в а VI

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

В задачу исследования устойчивости оболочек входит определение их критических нагрузок и форм потери устойчивости. Проинтегрировать уравнения устойчивости в замкнутом виде удается лишь в простейших случаях одномерных задач при однородном исходном состоянии, когда уравнения имеют постоянные коэффициенты.

В общем же случае точное решение уравнений устойчивости связано с непреодолимыми математическими трудностями. Поэтому большинство результатов в области устойчивости тонких оболочек получено различными приближенными методами.

§ 1. Однородные исходные состояния

Метод Фурье. Характеристическое уравнение. Этот метод является самым старым и, пожалуй, самым плодотворным. Решение уравнений (например, (2.14) гл. V) разыскивается в виде ряда Фурье

$$\omega = \sum_m C_m \cos(\lambda \xi - n\varphi), \quad \lambda = m\pi R/L, \quad (1.1)$$

где R , L — радиус и длина оболочки; m , n — целые числа. В случае длинных оболочек, когда нет необходимости удовлетворять граничным условиям, в ряде можно взять один член ряда

$$\omega = C_m \cos(\lambda \xi - n\varphi). \quad (1.2)$$

Подставив (1.2) в уравнение (2.14) гл. V, получим характеристическое уравнение, связывающее усилия в срединной поверхности оболочки с параметрами волнообразования m , n :

$$k_2^2 D [(\lambda^2 + n^2)^2 + \{1 - 2n^2\}] + \lambda^4 E h (\lambda^2 + n^2)^{-2} + T_1^0 \lambda^2 (1 + \{n^{-2}\}) + \\ + T_2^0 (n^2 - \{1 + \lambda^2 n^{-2}\}) - 2S^0 (\lambda/n) (n^2 - \{1\}) = 0. \quad (1.3)$$

Эти параметры подбираются или из условия минимума одного из усилий T_1^0 , T_2^0 , S^0 при фиксированных значениях двух других усилий, или из условия минимума коэффициента пропорциональности при пропорциональном возрастании усилий от некоторых заданных начальных значений.

Члены в фигурных скобках в уравнении (1.3) следует удерживать только в случае очень длинных оболочек, теряющих устойчивость по длинным волнам в направлении образующей. Для оболочек средней длины ($\chi \gg 1$, $\omega \ll 1$) их можно

опустить. В этом случае имеем уравнение

$$k_2^2 D (\lambda^2 + n^2)^2 + \lambda^4 E h (\lambda^2 + n^2)^{-2} + T_1^0 \lambda^2 + T_2^0 n^2 - 2S^0 \lambda n = 0. \quad (1.4)$$

Для очень длинных оболочек можно считать $\lambda^2 \ll n^2$. При этом уравнение (1.3) принимает вид

$$k_2^2 D (n^2 - 1)^2 + E h \lambda^4 n^{-4} + T_1^0 (1 + n^{-2}) \lambda^2 + T_2^0 (n^2 - 1 - \lambda^2 n^{-2}) - 2S^0 \lambda n^{-1} (n^2 - 1) = 0. \quad (1.5)$$

Это уравнение соответствует уравнению (2.16) гл. V полубезмоментной оболочки.

Для того чтобы учесть граничные условия, в ряде (1.1) необходимо удерживать восемь членов. Соответствующие им значения λ определяются в общем случае как корни характеристического уравнения (1.3), или уравнений (1.4), (1.5) — в частных случаях.

После определения корней необходимо удовлетворить граничным условиям. В результате получается система однородных алгебраических уравнений, нетривиальному решению которой соответствует равенство нулю ее определителя. Это условие позволяет вычислить нагрузку при заданных значениях геометрических параметров и параметров окружающих волн. Минимум нагрузки по n отвечает критическому состоянию оболочки. Иногда вместо ряда (1.1) используют ряд из произведений экспонент на тригонометрические функции.

§ 2. Неоднородные исходные состояния

При неоднородных исходных состояниях уравнения устойчивости имеют переменные коэффициенты, что приводит к необходимости использования для их решения приближенных методов.

1. Полуобратные методы. Суть методов, например, применительно к уравнению (2.14) гл. V, заключается в том, что функцию w , являющуюся решением уравнения, приближенно аппроксимируют аналитическим выражением, содержащим конечное число произвольных параметров. Чаще всего используют ряды типа

$$w_I = \sum_i C_i f_i, \quad (2.1)$$

где f_i — координатные функции, удовлетворяющие определенным условиям на границах и внутри области. Эти функции обычно выбираются из условия, чтобы ряд (2.1) по возможности лучше мог отобразить ожидаемую форму потери устойчивости. Наиболее удобными являются полные системы функций f_i .

Параметры C_i определяются одним из методов приближения ряда (2.1) к истинному решению.

Известно много методов приближения функций: метод равномерного приближения, метод наименьшего квадратического уклонения, метод коллокации и т. д. Однако большинство из них обладает значительными недостатками, затрудняющими их применение. Наибольшее распространение в задачах устойчивости получили методы Бубнова, Релея — Ритца, Тимошенко.

Метод Бубнова. Суть этого метода заключается в следующем. Напомним, что ортогональными в области S называются такие функции, интеграл от произведения которых, взятый по области, равен нулю. Очевидно, функция нуль, т. е. функция, тождественно равная нулю, будет ортогональной ко всем функциям f_i , их производным или операторам от f_i . Если выражение w_j подставить в уравнение $L(w) = 0$, то левая часть уравнения будет уже не равна нулю, а равна какой-то функции $L(w_j)$, которую обычно называют функцией ошибки. Требование, чтобы функция w_j являлась точным решением, т. е. чтобы функция ошибки обращалась в нуль, равносильно требованию ортогональности $L(w_j)$ ко всем функциям или операторам от этих функций. Обычно это требование заменяют более слабым, удерживая в ряде (2.1) n членов. В простейшем варианте условия ортогональности имеют вид

$$\int_S L(w_j) f_i ds = 0. \quad (2.2)$$

Эти условия после выполнения интегрирования приводят к системе однородных линейных алгебраических уравнений. Условие существования нетривиального решения этой системы позволяет определить критические нагрузки.

Условия (2.2) впервые были предложены и использовались И. Г. Бубновым (1872—1919). В рецензии на монографию С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем» И. Г. Бубнов [6.3] (1913) нашел критическую силу сжатого консольного стержня, а также критическую нагрузку свободно опертой прямоугольной пластины при неравномерном продольном сжатии. Год спустя в курсе строительной механики корабля И. Г. Бубнов ([6.2], стр. 527) (1914) применил этот метод в задаче устойчивости пластины при эксцентричном сжатии и чистом сдвиге. Позднее Б. Г. Галеркин [6.7] (1917) применил метод Бубнова (в его работе имеется ссылка (стр. 897) на курс И. Г. Бубнова по строительной механике корабля [6.2]) к исследованию устойчивости и вычислению прогибов стержней и пластин для различных граничных условий. Интерпретация метода Бубнова с позиций принципа возможных перемещений была дана

значительно позже. В самом деле, $L(\omega_j)$ как левая часть уравнения равновесия представляет собой равнодействующую всех внешних и внутренних сил, приложенных к элементу оболочки, в свою очередь f_i представляет собой возможное перемещение. Таким образом, условие (2.2) выражает приближенно равенство нулю работы внешних и внутренних сил на возможном перемещении. При этом предполагается, что функции f_i удовлетворяют всем граничным условиям. Если это не так, то условие (2.2) имеет более сложный вид (4.3) гл. III, включая в себя и контурные интегралы. С позиций ортогонализации метод Бубнова, вообще говоря, не связан с вариационной задачей и применим к любым дифференциальным уравнениям.

Во внедрении метода Бубнова роль Б. Г. Галеркина известна. По-видимому, поэтому до сих пор метод Бубнова называют методом Бубнова — Галеркина или методом Галеркина *). Справедливее этот метод называть методом Бубнова.

Метод Бубнова нашел широкое применение. Обоснованию и обобщению этого метода посвящено большое количество работ (см. [5.1]). В § 3 данной главы будет подробно расписан алгоритм исследования устойчивости оболочек, основанный на методе Бубнова.

Метод Релея — Ритца. Этот метод был предложен Релеем [6.31] (1873) для определения частот колебаний упругих систем. Обоснование метода было выполнено Ритцем [6.32] (1909). Ни Релей, ни Ритц проблем устойчивости не рассматривали, задачи устойчивости этим методом решал Брайан [6.25] (1888). В этом методе для приближения функций к решению используется вариационное уравнение (3.1) гл. IV. При этом функции f_i должны удовлетворять геометрическим граничным условиям.

Варьирование энергии по постоянным C_i приводит к линейным алгебраическим уравнениям

$$\frac{\partial (\delta^2 \Pi)}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

решение которых и определяет критическое состояние оболочки. Если энергетический критерий используется в смешанной форме (3.2) гл. V, то функция F или определяется из уравнения

*) В 1941 г. при жизни Б. Г. Галеркина (1871—1945) П. Ф. Папкович [11.12] (стр. 838) писал: «Заслуживает быть отмеченным, что этот расчетный прием, по существу, совпадающий с приемом, часто именуемым приемом Б. Г. Галеркина, был в рассматриваемой задаче использован И. Г. Бубновым, как, впрочем, и некоторыми другими авторами, при решении иных задач еще до выхода в свет работы Б. Г. Галеркина 1915 г.». В «Обзоре научных трудов Б. Г. Галеркина» (Собрание сочинений. Том I. М., АН СССР, 1952, стр. 12) отмечено: «За два года до появления работы Б. Г. Галеркина И. Г. Бубнов указал на возможность использования аналогичного приема».

совместности деформаций, или же задается также в виде (2.1) с определенным числом свободных параметров. Функция F при этом должна удовлетворять статическим граничным условиям. В таком варианте метод применялся П. Ф. Папковичем [11.12], поэтому в этом случае его иногда называют методом Ритца — Папковича.

Метод Тимошенко. Модификацию метода Релея — Ритца, основанную на непосредственном применении теоремы Дирихле, предложил С. П. Тимошенко [6.21] (1910). Для приближения функции используется уравнение $\delta^2\Pi=0$, которое приводит к зависимости $N=N(C_i)$ нагрузки N от параметров C_i . Из условия минимума нагрузки

$$\frac{\partial N}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

получаются линейные алгебраические уравнения. Равенство нулю их определителя служит условием для нахождения критической нагрузки. Этот метод в консервативных задачах приводит к тем же результатам, что и метод Релея — Ритца.

Эффективность методов Релея — Ритца и Тимошенко во многом зависит от удачного выбора аппроксимирующих функций. Точность решения возрастает с увеличением числа функций. Приближение к истинной величине нагрузки происходит сверху. Увеличивая число свободных параметров в искомых функциях, оболочке придают лишние степени свободы, что и способствует уточнению результатов, так как оболочка вообще является системой с бесконечным числом степеней свободы.

Методы Релея — Ритца и Тимошенко широко используются. Обоснованию и развитию их посвящено большое количество работ (см. [5.1]).

В тех случаях, когда не удается подобрать систему координатных функций, удовлетворяющих всем граничным условиям, в методе Релея — Ритца и Тимошенко можно потребовать, чтобы ряд (2.1) в целом удовлетворял граничным условиям. Полученные дополнительные условия вместе с минимизацией энергии или усилия приводят к изопериметрической задаче. В этом случае используется метод неопределенных множителей Лагранжа [6.26].

2. Метод конечных разностей. При использовании этого метода дифференциальные уравнения заменяются уравнениями в конечных разностях, так что их решение сводится, как и в вышерассмотренных методах, к решению системы линейных алгебраических уравнений. Большим преимуществом этого метода является его слабая зависимость от граничных условий задачи, геометрии оболочки и характера исходного напряженного состояния. Он может применяться при неоднородных напряженных

состояниях, когда уравнения имеют переменные коэффициенты, при переменной толщине оболочки и т. д.

Недостатком метода является высокий порядок систем алгебраических уравнений. Если в рассмотренных выше методах порядок системы можно снижать, выбирая удачно аппроксимирующие функции, то в данном случае такая возможность отсутствует.

Для обеспечения достаточной точности приходится выбирать малый шаг сетки, что и приводит к высокому порядку системы. Известно несколько методов, облегчающих решение систем: метод релаксации, метод экстраполяции, метод Гаусса, метод прогонки и т. д. В § 4 будут изложены алгоритмы, основанные на использовании методов Гаусса и прогонки. Это направление в отечественной литературе представлено в основном работами В. И. Мяченкова, Ю. В. Липовцева, В. В. Кабанова, результаты исследований которых нашли значительное отражение в книге.

3. Метод конечных элементов. Этот метод, как и метод конечных разностей, имеет широкие возможности и хорошо приспособлен для машинной реализации. В основе его лежит идея расчленения конструкций на отдельные элементы. Наибольшее распространение в настоящее время получил метод конечных элементов в перемещениях, имеющий много общего с методом Релея — Ритца и вариационно-разностными методами. В методе конечных элементов, в отличие от метода Релея — Ритца, аппроксимация перемещений производится не по всей области их определения, а в пределах отдельных элементов. Это позволяет оперировать с более простыми функциями. Минимизация потенциальной энергии при этом производится по узловым перемещениям, которые являются основными неизвестными. Возможность аппроксимации перемещений внутри элементов позволяет ограничиться сравнительно небольшим числом узлов, что является одним из преимуществ метода конечных элементов по сравнению с методом конечных разностей. Метод конечных элементов отчасти соединяет в себе преимущества методов конечных разностей и Релея — Ритца и в некоторой степени свободен от их недостатков.

4. Решение нелинейных уравнений. Возможен и другой путь определения критических нагрузок — непосредственно из решений нелинейных уравнений. В этом случае нет необходимости в разделении задачи на задачу определения исходного состояния оболочки и задачу устойчивости, как это делается при использовании статического критерия устойчивости. Критические нагрузки определяются по предельным точкам в характеристиках задачи (нагрузка — характерный параметр) или в точках разветвления нелинейного решения. Этот путь во многих задачах оказывает

ся труднее для машинной реализации, однако он дает возможность получать более полную информацию о поведении оболочек. Вместе с верхними критическими нагрузками при таком подходе можно найти нижние критические нагрузки. Первая нижняя критическая нагрузка является нагрузкой выхлопа с первого закритического равновесного состояния. Эта нагрузка, в отличие от традиционно определяемой нижней критической нагрузки как наименьшей из всех нижних нагрузок, может быть также принята за характеристику устойчивости оболочек. Для решения нелинейных уравнений часто используются методы численного интегрирования, различные модификации метода Ньютона, метод сведения краевой задачи к задаче Коши, метод последовательных приближений, метод последовательных нагружений, метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод Релея — Ритца, метод Бубнова и т. д.

§ 3. Алгоритм исследования устойчивости оболочек методом Бубнова

При неоднородных исходных состояниях прогибы и усилия исходного состояния зависят от координат. Представим их в общем случае в виде

$$\begin{aligned} T_1^0 &= -t_1 A_1 f_1(\xi, \varphi), & T_2^0 &= -t_1 A_2 f_2(\xi, \varphi), \\ S^0 &= -t_1 A_3 f_3(\xi, \varphi), & w^0 &= -t_1 A_0 f_0(\xi, \varphi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь t_1 — параметр нагрузки, A_i — параметры, $f_i(\xi, \varphi)$ — функции координат. Предполагаем, что эти функции четные по координате φ и удовлетворяют условиям Дирихле.

Будем разыскивать решение уравнений (2.11) гл. V в двойных рядах

$$\begin{aligned} w &= \sum_{mn} C_{mn} X_m Y_n, & F &= \sum_{mn} B_{mn} X_m Y_n, \\ X_m &= \sin \lambda_m \xi, & Y_n &= \cos n\varphi, & \lambda_m &= m\pi R/L. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.11), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \oint_0^{L/R} L_1 X_i Y_k d\xi d\varphi &= 0, \\ \oint_0^{L/R} L_2 X_i Y_k d\xi d\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где L_1, L_2 — левые части уравнений (2.11). В развернутом виде (3.3) имеет вид

$$(1 + \delta_{n,0}) \frac{\pi L}{2R} \{k_2^2 D [(\lambda_m^2 + n^2)^2 + 1 - 2n^2] C_{mn} + k_2 \lambda_m^2 B_{mn}\} - \\ - t_1 \sum_{ik} (C_{ik} I_{8ik}^{mn} + k_2^2 A_0 I_{7ik}^{mn} B_{ik}) = 0, \quad (3.4)$$

$$(1 + \delta_{n,0}) \frac{\pi L}{2R} [B_{mn} (\lambda_m^2 + n^2)^2 - EhR \lambda_m^2 C_{mn}] + t_1 Eh A_0 \sum_{ik} C_{ik} I_{7ik}^{mn} = 0 \\ (i, m = 1, 2, 3, \dots; k, n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Здесь

$$I_{8ik}^{mn} = A_1 \lambda_i^2 I_1 + A_2 (k^2 - 1) I_2, \quad I_{7ik}^{mn} = k^2 I_4 + \lambda_i^2 I_5 - 2\lambda_i k I_6, \\ I_6 = \oint_0^{L/R} \int_0^{\xi} f_{0\xi\varphi} \Phi d\xi d\varphi, \quad I_5 = \oint_0^{L/R} \int_0^{\xi} f_{0\varphi\varphi} \Phi d\xi d\varphi, \\ I_4 = \oint_0^{L/R} \int_0^{\xi} f_{0\xi\xi} \Phi d\xi d\varphi, \quad I_2 = \oint_0^{L/R} \int_0^{\xi} f_2 \Phi d\xi d\varphi, \\ I_1 = \oint_0^{L/R} \int_0^{\xi} f_1 \Phi d\xi d\varphi, \quad \Phi = X_m X_i Y_n Y_k. \quad (3.5)$$

Определяя из второго уравнения системы (3.4) коэффициент

$$B_{mn} = \frac{EhR}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} \left[\lambda_m^2 C_{mn} - \frac{2t_1 A_0}{\pi L (1 + \delta_{n,0})} \sum_{ik} C_{ik} I_{7ik}^{mn} \right] \quad (3.6)$$

и исключая его из первого уравнения, получаем бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_{mn}

$$(1 + \delta_{n,0}) \frac{\pi L}{2R} \alpha_{mn} C_{mn} - t_1 \left\{ \sum_{ik} C_{ik} I_{8ik}^{mn} + 2Eh k_2 A_0 \times \right. \\ \times \sum_{ik} \left[\frac{1}{2} I_{7ik}^{mn} \left\langle \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} + \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i^2 + k^2)^2} \right\rangle C_{ik} - \right. \\ \left. \left. - I_{7ik}^{mn} \frac{t_1 A_0}{\pi L (1 + \delta_{k,0}) (\lambda_i^2 + k^2)^2} \sum_{mn} C_{mn} I_{7ik}^{mn} \right] \right\} = 0, \quad (3.7)$$

$$\alpha_{mn} = k_2^2 D [(\lambda_m^2 + n^2)^2 + 1 - 2n^2] + Eh \frac{\lambda_m^4}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} \quad (3.8)$$

$$(i, m = 1, 2, 3, \dots; k, n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

В расчетах систему (3.7) можно усекать, используя подходящий алгоритм выбора чисел m, n . При этом значения m, n удобно рассматривать как комплекс. Обозначим его через m . Аналогично комплекс i, k обозначим через i . Система (3.7) в этом случае записывается, как для одномерного случая:

$$a_m C_m - t_1 \sum_i [C_i (I_{8i}^m + A_0 b_i \alpha_i^m) - t_1 A_0^2 b_i b_{2i}^m \sum_m C_m I_{7m}^i] = 0, \quad (3.9)$$

где

$$b_i = 2Ehk_2, \quad \alpha_i^m = \frac{1}{2} I_{7i}^m \left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} + \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i^2 + k^2)^2} \right], \quad (3.10)$$

$$a_m = (1 + \delta_{n,0}) \alpha_{mn} \pi L / 2R, \quad b_{2i}^m = \frac{I_{7i}^m}{\pi L (1 + \delta_{k,0}) (\lambda_i^2 + k^2)^2}. \quad (3.11)$$

Приведем эту систему к виду

$$\alpha_m C_m - t_1 \sum_i \beta_i^m C_i = 0, \quad (3.12)$$

где

$$\alpha_m = f a_m, \quad \beta_i^m = f \alpha_i^m = f [I_{8i}^m + A_0 b_i (\alpha_i^m - t_1 A_0 \sum_q b_{2q}^m I_{7i}^q)]. \quad (3.13)$$

Здесь f — функция, введенная для удобства расчета. Выбор ее будет пояснен ниже. В (3.13) q — комплекс q, p .

Равенство нулю определителя системы (3.12) дает уравнение для нахождения критической нагрузки

$$\Delta = \left| \sum_i \beta_i^m - \tilde{\lambda} \alpha_m \delta_{i,m} \right| = 0 \quad (\tilde{\lambda} = 1/t_1). \quad (3.14)$$

В уравнение (3.14) параметр нагрузки t_1 входит нелинейно, что обусловлено влиянием прогибов исходного состояния. Качественно это влияние оценивалось в § 2 гл. IV. Согласно полученным оценкам при потере устойчивости с интенсивным волнообразованием по обеим координатам прогибы исходного состояния следует учитывать, если изменения кривизны и кручение оболочки в исходном состоянии сравнимы с ее начальной кривизной, т. е. если

$$\omega_{\Phi\Phi}^0 \sim \omega_{\xi\xi}^0 \sim \omega_{\xi\Phi}^0 \sim R. \quad (3.15)$$

Если интенсивное волнообразование имеется только по окружности, то соответственно

$$\omega_{\xi\xi}^0 \sim R \sqrt{hk_2}, \quad \omega_{\Phi\Phi}^0 \sim R, \quad \omega_{\xi\Phi}^0 \sim R \sqrt[4]{hk_2}. \quad (3.16)$$

Полученные оценки основаны на сравнении порядков величин отдельных слагаемых в уравнениях устойчивости. Они не учитывают взаимодействия слагаемых, содержащих прогибы

исходного состояния. Поэтому выполнение этих оценок необходимо, но недостаточно для удержания этих слагаемых. В некоторых случаях (например, осесимметричное внешнее давление) и при выполнении этих оценок влияние прогибов оказывается малым. Если пренебречь этим влиянием, то следует положить

$$f_0 = \text{const}, \quad I_{7i}^m = 0. \quad (3.17)$$

В этом случае имеет место линейная постановка задачи о собственных значениях. Систему уравнений можно записать в удобной для расчетов матричной форме

$$(A - \tilde{\lambda}I)C = 0, \quad (3.18)$$

где

$$A = \left[\frac{\beta_i^m}{\alpha_m} \right], \quad I = [1], \quad C = [C_m]. \quad (3.19)$$

Задача определения критического параметра t_1 при этом сводится к нахождению наибольшего собственного числа матрицы A , вектор C позволяет определить прогибы оболочки. Удобно наибольшее собственное число вычислять методом итераций [6.22]. Основная трудность, которая при этом возникает, — это выбор чисел m, n , соответствующих главным членам ряда. Дело в том, что при сильной изменчивости исходного напряженного состояния форма потери устойчивости имеет большую неоднородность. Для ее описания в ряде требуется удерживать большое количество членов, причем главные члены ряда зачастую лежат далеко от его начала, так что нельзя взять достаточное число членов в порядке возрастания m, n от начала ряда: порядок матрицы A при этом был бы очень высоким даже для современных вычислительных машин. Можно использовать следующий прием выбора чисел m, n . Из системы (3.18) видно, что при постоянных β_i^m большая величина $\tilde{\lambda}$ соответствует меньшим α_m . Поэтому разумно за главные члены ряда взять такие, которые соответствуют меньшим α_m .

Функцию f , входящую в α_m , можно выбирать из физических соображений. При постоянных β_i^m , что имеет место при однородных напряженных состояниях, минимум α_m точно соответствует критической нагрузке. Если предполагаемая форма потери устойчивости близка к форме потери устойчивости некоторого однородного равновесного состояния, то и величину α_m следует брать соответствующей этому однородному состоянию. Значения m, n , обращающие в минимум α_m , будут выделять в ряде гармонику потери устойчивости однородного напряженного состояния. Соседние гармоники будут учитывать неоднородность исходного состояния. Так, например, для нагрузки с

доминирующим осевым сжатием можно взять $f = \lambda_m^{-2}$. Если же решающим является сдвиг или внешнее давление, то выбираются

$$f = (\lambda_m n)^{-1}, \quad f = n^{-2}$$

соответственно. Если нагрузка, а следовательно, и волнообразование носят смешанный характер, то можно перебрать несколько выражений f и выбрать минимальное значение критической нагрузки.

Описанный прием выбора главных членов ряда хорошо приспособлен к машинному счету и легко программируется, поскольку выбор m, n сводится к построению минимальной последовательности значений α_m . Порядок составленной по такому правилу матрицы следует установить из условия сходимости последовательности наибольших собственных чисел $\tilde{\lambda}_r, \tilde{\lambda}_{r+j}, \tilde{\lambda}_{r+2j}, \dots$, вычисленных из матриц $r, r+j, r+2j, \dots$ порядков соответственно, где j — какое-то заданное число.

Очевидно, что этот же прием можно использовать и для составления определителя (3.14), когда собственное значение нагрузки входит нелинейно. В этом случае решение задачи сводится к насчитыванию определителя для ряда значений параметра t_1 . Значение t_1 , обращающее определитель в нуль, будет критическим.

В тех случаях, когда исходное состояние неоднородно только по одной из координат, решение упрощается. Двойные ряды (3.2) заменяются одинарными по той координате, в направлении которой имеется неоднородность напряжений. При этом члены ряда можно брать от его начала в порядке возрастания номеров. Тогда отпадает необходимость использования упомянутого приема выбора главных членов ряда.

Рассмотрим частные случаи:

осесимметричное исходное состояние:

$$f_1 = f_1(x), \quad f_2 = f_2(x), \quad f_0 = f_0(x), \quad w = \cos n\varphi \sum_m C_m \sin \lambda_m \xi, \quad (3.20)$$

в этом случае

$$S^0 = f_3 = A_3 = I_3 = I_4 = I_6 = 0,$$

$$I_1 = \pi \int f_1(x) X_i X_m dx, \quad I_2 = \pi \int f_2(x) X_i X_m dx, \quad (3.21)$$

$$I_4 = \pi \int f_{0xx} X_i X_m dx, \quad I_7 = n^2 I_4, \quad I_8 = A_1 \lambda_1^2 I_1 + A_2 n^2 I_2,$$

здесь n — число волн по окружности, которое подбирается из условия минимума критической нагрузки;

неосесимметричное однородное по длине исходное состояние

$$f_1 = f_1(\varphi), \quad f_2 = f_2(\varphi), \quad f_0 = f_0(\varphi), \quad w = \sin \lambda_m \xi \sum_n C_n \cos n\varphi, \quad (3.22)$$

в этом случае

$$\begin{aligned}
 S^0 &= f_3 = A_3 = I_3 = I_4 = I_6 = 0, \\
 I_1 &= \frac{L}{2R} \oint f_1 Y_k Y_n d\varphi, \quad I_2 = \frac{L}{2R} \oint f_2 Y_k Y_n d\varphi, \\
 I_5 &= \frac{L}{2R} \oint f_{0\varphi\varphi} Y_k Y_n d\varphi, \quad I_{7k}^n = \lambda_m^2 I_5, \\
 I_{8k}^n &= A_1 \lambda_m^2 I_1 + A_2 n^2 I_2, \quad \lambda_m = m\pi R/L.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Здесь m — число полуволи по длине, которое подбирается из условия минимума критической нагрузки.

Изложенный алгоритм впервые применялся В. В. Кабановым [6.11] в задаче устойчивости оболочки при поперечном изгибе. Описанный прием выбора главной гармоники в ряде в несколько отличном виде использовался раньше Н. В. Зволинским [6.10] в задаче устойчивости панели при сдвиге. Близкий к этому приему способ, основанный на минимизации нагрузки по мере добавления числа членов в ряде, был предложен С. Н. Кукуджановым [6.15].

§ 4. Конечно-разностный алгоритм

Суть конечно-разностных методов, как известно, заключается в замене дифференциальных уравнений алгебраическими с последующим решением их численными методами.

В задачах устойчивости оболочек применение этих методов сдерживалось высоким порядком систем алгебраических уравнений, что обусловливается значительной изменяемостью функций, описывающих как исходное, так и нейтральное состояние. Возможности эффективного применения конечно-разностных методов появились в последние годы в связи с внедрением в практику исследований ЭВМ. Эти методы обладают несомненным достоинством по сравнению с другими методами. Они позволяют стандартным образом решать задачи устойчивости при различных граничных условиях, различных нагрузках, в том числе полосовых и локальных. При этом не возникает затруднений и с учетом действительного характера докритического состояния. Ниже дается изложение одного эффективного алгоритма решения задач конечно-разностным методом [6.13]. Этот алгоритм основан на представлении дифференциальных уравнений устойчивости в матричной форме и решении алгебраических разностных уравнений матричным методом исключения по Гауссу. Алгоритм приводит к простым рекуррентным зависимостям, позволяющим стандартно и с большой точностью решать широкий круг задач устойчивости оболочек при осесимметричной нагрузке.

Конечно-разностная аппроксимация уравнений. Изложение алгоритма дадим применительно к следующей системе уравнений устойчивости оболочек:

$$\begin{aligned} D[\nabla^4 \omega + k_2^2(2\omega_{yy} + k_2^2 \omega)] - k_1 F_{yy} - k_2 F_{xx} - \\ - k_2 F_{yy} T_1^0 / Eh - T_1^0 \omega_{xx} - T_2^0 \omega_{yy} - F_{yy} \omega_{xx}^0 = 0, \quad (4.1) \\ \nabla^4 F + Eh(k_2 \omega_{xx} + k_1 \omega_{yy} + \omega_{yy} \omega_{xx}^0) = 0. \end{aligned}$$

Эта система применима к пологим оболочкам, к непологим оболочкам при локальной потере устойчивости и к длинным круговым цилиндрическим оболочкам при сжатии. Введя подстановку:

$$\begin{aligned} \omega = \frac{w}{\theta}, \quad \Phi = \frac{F}{Ehk_2\theta^3}, \quad \eta = \frac{x}{\theta}, \quad s = \frac{y}{\theta}, \quad \theta^2 = \frac{hR}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \\ P^* = \frac{P}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad N^* = \frac{N}{T_B}, \\ T_B = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad \alpha_0 = k_2\theta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$T_2^0 = PR + T_k, \quad t_1 f_2 = -R\omega_{xx}^0, \quad k_1^* = k_1/k_2,$$

$$t_1 f_1 = -T_k/k_2^2 Eh\theta^2 = -2T_k/T_B,$$

запишем уравнения (4.1) в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \nabla^4 \omega - \Phi_{\eta\eta} + (t_1 f_1 - P^*) \omega_{ss} - k_1^* \Phi_{ss} + (t_1 f_2 - k_1^*) \Phi_{ss} + \\ + 2N^* \omega_{\eta\eta} + \alpha_0^2 [(2\omega_{ss} + \alpha_0^2 \omega) + 2N^* \Phi_{ss}] = 0, \quad (4.3) \\ \nabla^4 \Phi + \omega_{\eta\eta} - (t_1 f_2 - k_1^*) \omega_{ss} = 0. \end{aligned}$$

Разделяя переменные обычным способом

$$\omega = W \cos \beta s, \quad \Phi = f \cos \beta s \quad (\beta = n\alpha_0), \quad (4.4)$$

где n — число волн по окружности, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} W_{\eta\eta\eta\eta} - 2\beta^2 W_{\eta\eta} + \beta^4 W - f_{\eta\eta} - \beta^2 [(t_1 f_1 - P^*) W + (t_1 f_2 - k_1^*) f] + \\ + 2N^* W_{\eta\eta} + \alpha_0^2 [(\alpha_0^2 - 2\beta^2) W - 2N^* \beta^2 \alpha_0^2 f] = 0, \quad (4.5) \\ f_{\eta\eta\eta\eta} - 2\beta^2 f_{\eta\eta} + \beta^4 f + W_{\eta\eta} + (t_1 f_2 - k_1^*) \beta^2 W = 0. \end{aligned}$$

Заменим уравнения (4.5) системой четырех уравнений второго порядка

$$\Psi = f_{\eta\eta}, \quad U = W_{\eta\eta},$$

$$\begin{aligned} U_{\eta\eta} - 2\beta^2 U + \beta^4 W - \Psi - \beta^2 [(t_1 f_1 - P^*) W + (t_1 f_2 - k_1^*) f] + \\ + \alpha_0^2 [(\alpha_0^2 - 2\beta^2) W - 2N^* \beta^2 \alpha_0^2 f] + 2N^* U = 0, \quad (4.6) \\ \Psi_{\eta\eta} - 2\beta^2 \Psi + \beta^4 f + U + (t_1 f_2 - k_1^*) \beta^2 W = 0. \end{aligned}$$

Разобьем относительную длину $\eta_m = L/\theta$ оболочки на m частей с шагом c (рис. 6.1). Через $i = 0, 1, 2, \dots$ занумеруем точки, начиная от начала координат. Координаты точек $\eta_i = ic$, при этом

$$c = \eta_m/m, \quad \eta_m = L/\theta. \quad (4.7)$$

Производные аппроксимируем через центральные разности. Для точки i

$$2c\vartheta_{\eta} = \vartheta_{i+1} - \vartheta_{i-1}, \quad c^2\vartheta_{\eta\eta} = \vartheta_{i+1} - 2\vartheta_i + \vartheta_{i-1}. \quad (4.8)$$

Система уравнений (4.6) приводится к виду

$$I(\vartheta_{i-1} + \vartheta_{i+1}) + B_i\vartheta_i = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m), \quad (4.9)$$

где $I = [1]$ — единичная матрица,

$$B_i = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & -2 & -c^2 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} A_{31} &= c^2\beta^2[(k_1^* - t_1 f_{21}) - 2N^* \alpha_0^4], \\ A_{32} &= c^2\beta^2[\beta^2 - t_1 f_1 + P^* + \alpha_0^2(\alpha_0^2\beta^{-2} - 2)], \\ A_{33} &= -2(c^2\beta^2 + 1 - c^2N^*), \quad A_{34} = -c^2, \\ A_{41} &= \beta^2 c^2, \quad A_{42} = c^2\beta^2(t_1 f_{21} - k_1^*), \quad A_{43} = c^2, \\ A_{44} &= -2(c^2\beta^2 + 1), \end{aligned}$$

$\vartheta = [f, W, U, \Psi]$ — матрица-столбец неизвестных функций.

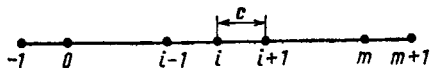


Рис. 6.1. Узлы на образующей оболочки при расчете ее методом конечных разностей.

Функции f_{1i} , f_{2i} вычисляются для координат η_i точек разбиения $i = 0, 1, 2, \dots$. К системе алгебраических уравнений (4.9) следует добавить уравнения, вытекающие из граничных условий при $x = 0, L$, которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{p1}\omega + \alpha_{p2}Q &= 0, & \alpha_{k1}\omega_x + \alpha_{k2}M_1 &= 0, \\ \alpha_{n1}u + \alpha_{n2}T_1 &= 0, & \alpha_{c1}v + \alpha_{c2}S &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_1 &= F_{yy}, \quad S = -F_{xy}, \quad Q = M_{1x} + 2H_y + T_1^0\omega_x + T_1\omega_x^0, \\ M_1 &= -D(\omega_{xx} + \nu\omega_{yy}), \quad H = -D(1 - \nu)\omega_{xy}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Приравнивая коэффициенты α_{ij} нулю или единице, можно получить разные варианты граничных условий. Используя (2.20) гл. V, получаем производные u и v

$$\begin{aligned} u_{yy} &= -[(2 + \nu)F_{xyy} + F_{xxx} + E h k_2 \omega_x]/Eh - \omega_x^0 \omega_{yy}, \\ v_y &= (F_{xx} - \nu F_{yy})/Eh + k_2 \omega, \end{aligned} \quad (4.13)$$

которые можно использовать в условиях (4.11) вместо u и v . Подставляя (4.12), (4.13) в (4.11), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{p1} \omega + \alpha_{p2} \{-D[\omega_{xxx} + (2 - \nu)\omega_{xyy}] + T_1^0 \omega_x + F_{yy} \omega_x^0\} &= 0, \\ \alpha_{k1} \omega_x + \alpha_{k2} [-D(\omega_{xx} + \nu \delta_4 \omega_{yy})] &= 0, \\ \alpha_{n1} [F_{xxx} + (2 + \nu)\delta_1 E_{xyy} + F h k_2 \delta_2 \omega_x + E h \omega_x^0 \omega_{yy}] + \alpha_{n2} F_{yy} &= 0, \\ \alpha_{c1} (F_{xx} - \nu \delta_3 F_{yy} + \delta_8 E h k_2 \omega) + \alpha_{c2} (-F_{xy}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где δ_i так же, как и α_{ij} , равны нулю или единице.

Заменяя производные согласно (4.7) и вводя вектор ϑ , из (4.14) находим

$$G_i (\vartheta_{i+1} - \vartheta_{i-1}) + D_i \vartheta_i = 0. \quad (4.15)$$

Здесь

$$G_i = \begin{bmatrix} -\alpha_{n1} (2 + \nu) \beta^2 \delta_1 & -\delta_2 \alpha_{n1} & 0 & \alpha_{n1} \\ 0 & -\alpha_{p2} [(2 - \nu) \beta^2 - 2N^*] & \alpha_{p2} & 0 \\ 0 & \alpha_{k1} & 0 & 0 \\ \alpha_{c2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$D_i = \begin{bmatrix} \alpha_{n2} 2c \beta^2 & -\alpha_{n1} 2c \beta^2 \omega_{\eta}^0 \alpha_0^{-1} & 0 & 0 \\ \alpha_{p2} 2c \beta^2 \omega_{\eta}^0 \alpha_0^{-1} & \alpha_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{k2} \nu \beta^2 \delta_4 & \alpha_{k2} & 0 \\ \alpha_{c1} \delta_3 \nu \beta^2 & \alpha_{c1} \delta_8 & 0 & \alpha_{c1} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Варианты граничных условий показаны в табл. 6.1. В первой колонке показан номер варианта, во второй — функции, равной нулю в этих вариантах, в двух последних колонках соответствующие коэффициенты, равные нулю или единице. Аналогично можно составить таблицы и для других граничных условий, располагаясь коэффициентами α_{ij} , δ_i . Условия (4.15) ставятся в контурных точках $i = 0, m$. Для этого необходимо ввести еще две законтурные точки $i = -1, m + 1$. Полное число точек a , следовательно, и полное число неизвестных ϑ_i , равно $m + 3$. Число уравнений (4.9) равно $m + 1$, число граничных условий — 2. Таким образом, число неизвестных соответствует числу уравнений.

Полученная система алгебраических уравнений однородная. Решение задачи сводится к определению наименьшего собственного числа этой системы. Это можно сделать различными

ТАБЛИЦА 6.1

	0	0	1
S1	$w_{M_1 T_1 S}$	$\alpha_{p2} \alpha_{n1} \alpha_{c1} \alpha_{k1} \delta_4 \delta_8$	$\alpha_{p1} \alpha_{k2} \alpha_{n2} \alpha_{c2}$
S2	$w_{M_1 u S}$	$\alpha_{p2} \alpha_{n2} \alpha_{c1} \alpha_{k1} \delta_4 \delta_8$	$\alpha_{p1} \alpha_{k2} \alpha_{n1} \alpha_{c2} \delta_2$
S3	$w_{M_1 T_1 v}$	$\alpha_{p2} \alpha_{n1} \alpha_{c2} \alpha_{k1} \delta_4 \delta_8$	$\alpha_{p1} \alpha_{k2} \alpha_{n2} \alpha_{c1} \delta_3$
S4	$w_{M_1 u v}$	$\alpha_{p2} \alpha_{n2} \alpha_{c2} \alpha_{k1} \delta_4 \delta_8$	$\alpha_{p1} \alpha_{k2} \alpha_{n1} \alpha_{c1} \delta_1 \delta_2 \delta_3$
C1	$w_{w_x T_1 S}$	$\alpha_{p2} \alpha_{n1} \alpha_{c1} \alpha_{k2} \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_8$	$\alpha_{p1} \alpha_{k1} \alpha_{n2} \alpha_{c2}$
C2	$w_{w_x u S}$	$\alpha_{p2} \alpha_{n2} \alpha_{c1} \alpha_{k2} \delta_1 \delta_2 \delta_8$	$\alpha_{p1} \alpha_{k1} \alpha_{n1} \alpha_{c2}$
C3	$w_{w_x T_1 v}$	$\alpha_{p2} \alpha_{n1} \alpha_{c2} \alpha_{k2} \delta_2 \delta_3 \delta_8$	$\alpha_{p1} \alpha_{k1} \alpha_{n2} \alpha_{c1}$
C4	$w_{w_x u v}$	$\alpha_{p2} \alpha_{n2} \alpha_{c2} \alpha_{k2} \delta_2 \delta_8$	$\alpha_{p1} \alpha_{k1} \alpha_{n1} \alpha_{c1} \delta_1 \delta_3$

способами. Ниже остановимся подробно на матричном исключении по Гауссу.

Метод матричного исключения по Гауссу. Метод исключения по Гауссу в обычном варианте широко используется при решении систем алгебраических уравнений. К задачам устойчивости оболочек он был применен в работе [6.24] Альмротом. Реализация этого метода на ЭВМ для оболочек вращения при осесимметричном моментном исходном состоянии выполнена В. И. Мясченковым [6.19]. Ниже излагается метод матричного исключения по Гауссу [6.13], который приводит к более компактной записи определителя (три диагонали вместо девяти) и простым рекуррентным формулам.

Перепишем систему уравнений (4.9), (4.15):

$$G_0(\vartheta_1 - \vartheta_{-1}) + D_0 \vartheta_0 = 0,$$

$$I(\vartheta_{i-1} + \vartheta_{i+1}) + B_i \vartheta_i = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, m), \quad (4.18)$$

$$G_m(\vartheta_{m+1} - \vartheta_{m-1}) + D_m \vartheta_m = 0.$$

Уравнение для критической нагрузки получим, приравняв нулю определитель системы (4.18):

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & m & m+1 \\ -1 & -G_0 & D_0 & G_0 & & & & & \\ 0 & I & B_0 & I & & & & & \\ 1 & & I & B_1 & I & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ i & & & I & B_i & I & & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m & & & & I & B_{m-1} & I & & \\ m+1 & & & & I & B_m & I & & \\ & & & & -G_m & D_m & G_m & & \end{vmatrix} = 0. \quad (4.19)$$

Если $G_0 = 0$ или $G_m = 0$, то в определителе Δ можно отбросить соответственно две первые строки и два первых столбца или две последние строки и два последних столбца. При этом оставшийся определитель $\Delta = \Delta^0$ оказывается вложенным в определитель Δ для случая $G_0 \neq 0$, $G_m \neq 0$ (пунктир). Этот определитель методом исключения по Гауссу в матричном варианте приводится к определителю:

$$\begin{vmatrix} -G_0 & D_0 & G_0 & & & \\ -M_0 & I & 0 & & & \\ & -M_1 & I & & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -M_{m-1} & I & 0 \\ & & & & -M_m & I & 0 \\ & & & & I & B_m & I \end{vmatrix} \Delta_1. \quad (4.20)$$

При этом

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |B_0| \Delta^0, \quad \Delta^0 = \Delta_p^0 \Delta_1^0, \quad \Delta_p^0 = |B_1|, \quad \Delta_1^0 = |B_2 B_3 \dots B_m|, \\ B_i &= B_i + M_{i+1}, \quad B_m = D_m - G_m B_m, \\ M_i &= -(B_i + M_{i+1})^{-1}, \quad M_m = 2(D_m - G_m B_m)^{-1} G_m. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Умножив третью сверху строку на $-G_m$, прибавим ее к первой строке. Умножим вторую строку слева на $-(D_0 + G_0 M_1)$ и прибавим к полученной первой строке. В результате приходим к треугольному определителю

$$\begin{vmatrix} \Delta_p & & i-1 & i & i+1 \\ -M_0 & I & & & \\ & -M_1 & I & & \\ i-1 & & & \ddots & \\ i & & & & -M_i & I \\ i+1 & & & & & \ddots \\ & & & & -M_{m-1} & I & 0 \\ & & & & -M_m & I & 0 \\ & & & & I & B_m & I \end{vmatrix} \Delta_1, \quad (4.22)$$

где

$$\Delta_p = |(D_0 + G_0 M_1) M_0 - G_0|. \quad (4.23)$$

Величина треугольного определителя равна произведению его диагональных элементов, так что

$$\Delta = \Delta_p \Delta_1 = 0. \quad (4.24)$$

Матрицы M_1 , M_0 , входящие в Δ_p , и матрицы B_i в Δ_1 вычисляются по рекуррентным формулам (4.21). Если в граничных условиях $G_0 = 0$, то процесс исключения заканчивается на третьей сверху строке и тогда вместо (4.24) получим

$$\Delta^0 = \Delta_p^0 \Delta_1^0 = 0. \quad (4.25)$$

Таким образом, прямой ход исключения привел к уравнению для критической нагрузки. Векторы θ_i могут быть определены при обратном ходе, который сводится к решению системы уравнений с треугольной матрицей, соответствующей определителю (4.22)

$$\theta_i = M_i \theta_{i-1}. \quad (4.26)$$

Определитель Δ используется при $G_m \neq 0$, а Δ^0 — при $G_m = 0$.

Полученный алгоритм легко программируется. Процесс определения критических нагрузок сводится к вычислению определителя Δ или Δ^0 при заданных значениях параметров η_m , c , β и параметров нагрузки N^* , t_1 , P^* . Критическому состоянию оболочки отвечают наименьшие значения параметров N^* , t_1 , P^* , при которых определитель обращается в нуль. Процесс счета удобно организовать следующим образом. Перебирая ряд значений β при заданных параметрах нагрузки и геометрии оболочки и находя наименьший корень t_1 уравнения (4.24) для каждого β , получаем зависимость этих наименьших корней от β (рис. 6.2). Минимум в этой зависимости соответствует критическому состоянию оболочки. При любом числе узлов вычисления сводятся к вычислению определителя четвертого порядка. Это позволяет, последовательно увеличивая m , проследить за сходимостью результата и получить точное решение задачи для любых граничных условий и любых нагрузок. Единственным ограничением может служить машинное время, которое увеличивается прямо пропорционально числу узлов.

Число узлов зависит от характера задачи: вида нагрузки, граничных условий, наличия разрывов в функциях и т. д. В большинстве решенных авторами задач в последующих параграфах достаточное для полной сходимости число узлов m равнялось 200 на интервале $\eta_m = 15$, так что примерно $m \approx 13,3 \eta_m$, а шаг составлял $c = 0,075$. В отдельных случаях (разрывы температурной нагрузки) число точек приходилось увеличивать до 600—800.

Если докритическое состояние симметрично относительно середины оболочки, то можно экономить машинное время, рас-

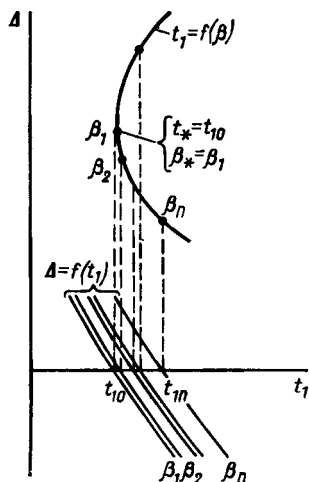


Рис. 6.2 Зависимости определителя устойчивости от параметра нагрузки и его собственного значения от параметра окружных волн

смотрев только половину оболочки. В этом случае в середине оболочки необходимо ставить условия сопряжения обеих половин оболочки, из которых определяется матрица M_m . Можно поставить или условия симметрии

$$\omega_x = \omega_{xxx} = F_x = F_{xxx} = 0, \quad (4.27)$$

или условия косой симметрии

$$\omega = \omega_{xx} = T_1 = v = 0. \quad (4.28)$$

При этом в условии (4.15) матрицы $G_m = 0$, $D_m = I$, когда имеет место случай (4.28), и

$$G_m = I, \quad D_m = 0 \quad (4.29)$$

в случае (4.27).

При локальной форме потери устойчивости можно получить дальнейшую экономию машинного времени, рассмотрев только часть оболочки длиной l , на которой полностью затухают все возмущения исходной формы. Если, к примеру, потеря устойчивости происходит у краев, то l — это длина части оболочки, прилегающей к краю. В этом случае при $x = l$ следует считать $\vartheta_m = 0$, т. е. $M_m = 0$, что эквивалентно условию (4.28). Если потеря устойчивости происходит в зоне сосредоточенного воздействия каких-то возмущающих факторов, то l — длина, включающая в себя зону затухания возмущений. В этом случае

$$M_m = 0, \quad G_m = 0, \quad D_m = I. \quad (4.30)$$

Связь метода Гаусса с методом прогонки. При исключении по методу Гаусса предполагалось существование матриц M_i , т. е. считалось, что матрицы $B_i + M_{i+1}$ неособенные. В таком случае определитель $\Delta_i \neq 0$, а определитель Δ_p содержит в себе все нули определителя Δ . Уравнение $\Delta = 0$ может быть заменено более простым уравнением

$$\Delta_p = 0. \quad (4.31)$$

Это уравнение вместе с рекуррентными формулами для матриц M_i составляет вычислительный алгоритм метода матричной прогонки. К задачам прочности оболочек метод матричной прогонки применялся во многих работах (см., например, [6.30]). К задачам устойчивости оболочек, вероятно, впервые он был применен в работе [6.29] Хуаном, где была рассмотрена сферическая оболочка при внешнем давлении. В дальнейшем этим методом Л. И. Шкутин решил задачу устойчивости цилиндрической оболочки при сжатии [6.23]. Реализация метода на ЭВМ выполнена Ю. В. Липовцевым и В. В. Кабановым, которые этим методом решили большое число задач [6.16, 6.12 и др.]. Обычно в методе прогонки уравнение (4.31) получают иначе, сразу разыскивая решение уравнения (4.9) в виде (4.26). Подставив

Таким образом, для нахождения формы потери устойчивости в процессе счета необходимо запоминать матрицы M_i . Число узлов j для определения прогиба может совпадать с числом узлов i , но может быть взято и значительно меньше. Последнее более целесообразно, так как это позволяет экономить машинное время.

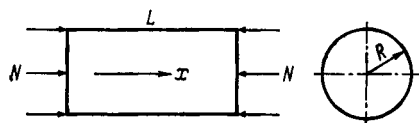
Г л а в а VII

ОСЕВОЕ СЖАТИЕ

Этот случай нагружения является самым показательным с точки зрения несоответствия теоретических решений большинству экспериментов. Впервые осесимметричная форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки наблюдалась и была описана в экспериментальной работе Лилли [7.38] в 1908 г. Неосесимметричная форма исследовалась Маллоком [7.42] (1908).

§ 1. Линейная задача. Классическая постановка

Рассмотрим оболочку длиной L , нагруженную по краям равномерно распределенными усилиями сжатия N (рис. 7.1). Края оболочки свободно оперты на жесткие в своей плоскости диафрагмы. В исходном состоянии предполагаем возможность свободного расширения оболочки в радиальном направлении, так что в оболочке будут действовать только усилия $T_1^0 = -N$.



Граничные условия при $x = 0, L$ в нейтральном состоянии имеют вид

$$w = M_1 = v = T_1 = 0, \quad (1.1)$$

что равносильно условиям

$$w = w_{xx} = F_{yy} = F_{xx} = 0. \quad (1.1')$$

Из характеристического уравнения гл. VI, положив в нем $T_2^0 = S^0 = 0$, получаем

$$k_2^2 D [(\lambda^2 + n^2)^2 + \{1 - 2n^2\}] + \lambda^4 E h (\lambda^2 + n^2)^{-2} - N \lambda^2 (1 + \{n^{-2}\}) = 0. \quad (1.2)$$

Для оболочки средней длины можно опустить члены в фигурных скобках. В этом случае

$$N = k_2^2 D \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} + E h \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2}. \quad (1.3)$$

Минимизируя это выражение, находим

$$\frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} = \sqrt{12(1 - v^2)} \frac{R}{h}, \quad (1.4)$$

при этом

$$N = \frac{Eh}{\sqrt{3(1 - v^2)} R} = T_v. \quad (1.5)$$

Это и есть классическое критическое усилие сжатия или, как его еще называют, верхнее критическое усилие. Формула (1.5) была выведена совместными усилиями Лоренца и С. П. Тимошенко [7.39, 7.12], поэтому ее обычно называют формулой Лоренца — Тимошенко.

Как видно из выражения (1.3), это усилие одинаково как для осесимметричной ($n = 0$), так и для неосесимметричной форм потери устойчивости.

Выражение (1.4) дает связь числа окружных волн с числом полуволн по длине. Из него видно, что любому n соответствует два значения λ , поскольку относительно λ уравнение (1.4) квадратное. Одно из этих значений определяет волнообразование с малым числом полуволн по длине, другое — с большим. Таким образом, при осесимметричной форме потери устойчивости из выражения (1.4) имеем

$$\lambda^2 = \sqrt{12(1 - v^2)} \frac{R}{h}, \quad m = \chi. \quad (1.6)$$

Число полуволн вдвое больше, чем при неосесимметричной потере устойчивости, а вмятины в два раза короче.

Если оболочка очень короткая, то выражение (1.3) нельзя минимизировать по m . В этом случае следует положить $m = 1$ и пренебречь вторым слагаемым в сравнении с первым, так как величина λ большая. В результате ($n = 0$) приходим к формуле Эйлера для элементарной полоски, вырезанной из оболочки двумя образующими

$$N = k_2^2 D \lambda^2 = \frac{\pi^2 E h^3}{12(1 - v^2) L^2}. \quad (1.7)$$

Для длинных оболочек можно считать $\lambda^2 \ll n^2$. Уравнение (1.2) при этом дает

$$N = k_2^2 D \frac{(n^2 - 1)^2 n^2}{\lambda^2 (n^2 + 1)} + Eh \frac{\lambda^2}{(n^2 + 1) n^2}. \quad (1.8)$$

При $n = 1$ имеем

$$N = Eh \frac{\lambda^2}{2} = \frac{Eh}{2} \left(\frac{\pi R}{2} \right)^2, \quad 2\pi R N = \frac{\pi^2 E I}{L^2}, \quad I = \pi h R^3. \quad (1.9)$$

Это — формула Эйлера для длинной трубки. Поперечные сечения при потере устойчивости трубки остаются круговыми.

Если $n > 1$, то выражение (1.8) имеет минимум при

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \frac{h}{R} \frac{n^2 (n^2 - 1)}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}, \quad m = \frac{n(n^2 - 1)^{1/2}}{\omega}, \quad (1.10)$$

равный

$$N = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (1.11)$$

Получили формулу Саутуэлла — Тимошенко [4.16]. Наименьшее значение критического усилия отвечает $n = 2$:

$$N = \frac{3}{5} \frac{Eh}{R\sqrt{3(1 - \nu^2)}}. \quad (1.12)$$

Поперечные сечения оболочки деформируются в эллипс. Полу-волна при этом имеет значительную протяженность по образующей

$$l = \frac{L}{m} = \pi R \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{12}} \left(\frac{R}{h} \right)^2. \quad (1.13)$$

При больших значениях n формулы (1.5), (1.12) дают одинаковые результаты.

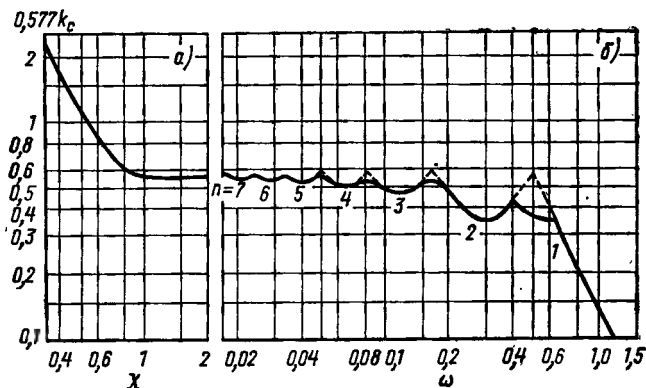


Рис. 7.2. Критические усилия сжатия свободно опертой круговой цилиндрической оболочки.

Более точные значения критических усилий можно получить из (1.8), считая m и n дискретными. Перепишем (1.8) в виде

$$k_c = \frac{N}{T_b} = \frac{1}{2} \left[\omega^2 \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{m^2 (n^2 + 1)} + \frac{1}{\omega^2} \frac{m^2}{n^2 (n^2 + 1)} \right], \quad (1.14)$$

где

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (1.15)$$

Из (1.14) видно, что критическое усилие можно выразить в зависимости от одного параметра ω . Такая зависимость, построенная Флюгге [4.15], показана на рис. 7.2. Из этой фигуры видно, что формула Лоренца — Тимошенко применима при

$$\chi > 0,8, \quad \omega < 0,1, \quad (1.16)$$

или

$$1,38 \sqrt{\frac{h}{R}} < \frac{L}{R} < 0,57 \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (1.17)$$

Здесь

$$\chi = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (1.18)$$

Из рис. 7.2 можно определить и значения числа окружных волн n в формуле (1.11) в зависимости от параметра ω .

§ 2. Влияние граничных условий

Формулы (1.5), (1.7), (1.11) получены при граничных условиях (1.1) в предположении безмоментности исходного состояния. Как уже отмечалось, оболочка в этом случае должна иметь возможность свободно расширяться радиально до тех пор, пока нагрузка не достигнет критического значения.

Первые эксперименты, выполненные Робертсоном, Флюгге, Вильсоном и Ньюмарком, Лундкуистом, Доннеллом (см. [5.1]), не подтвердили результатов классического решения. Критические напряжения получились на 10—50% ниже теоретических. Долгое время считали, что краевые условия для оболочек средней длины и длинных оболочек не оказывают существенного влияния на величину критической нагрузки. Формулу (1.5) считали справедливой и для других граничных условий. Это объяснялось локальностью краевого эффекта и форм потери устойчивости. Уточнение формулы (1.5) для различных граничных условий было получено позже. Из ряда работ этого направления отметим сначала работы, в которых исходное состояние принималось безмоментным.

В 1942 г. Н. А. Кильчевский [7.7] рассмотрел граничные условия

$$w_{xx} = 0, \quad Dw_{xxx} + \sigma h w_x = 0,$$

соответствующие свободным кромкам. Слагаемое $\sigma h w_x$ является поперечной силой, возникающей на краях от поворота образующей при сохранении постоянного направления силы σh . Для осесимметричной формы потери устойчивости критическое усилие получилось вдвое меньше классического.

В 1961 г. Охира [7.46] на примере свободно опертой по краям полубесконечной оболочки показал, что если в граничных

условиях вместо $v = 0$ потребовать равенства нулю касательных напряжений, считая таким образом край оболочки незакрепленным в окружном направлении, то величина критического напряжения будет также примерно вдвое меньше классического. Исследование Охиры выполнено численно на ЭЦВМ. Примерно в это же время Нахбар и Хофф [7.44] получили в замкнутом виде решение для полубесконечной оболочки, имеющей свободные кромки. Величина k_c в этом случае составляла 0,38. В дальнейшем влияние различных граничных условий было подробно изучено в работах В. И. Кожевникова [7.8], Хоффа, Рефильда, Сунга [7.26, 7.27, 7.28], Альмрота [6.24], Тилемана, Эссингера, Охиры и др. (см. [5.1]). Рассмотрены следующие варианты условий на краях оболочки:

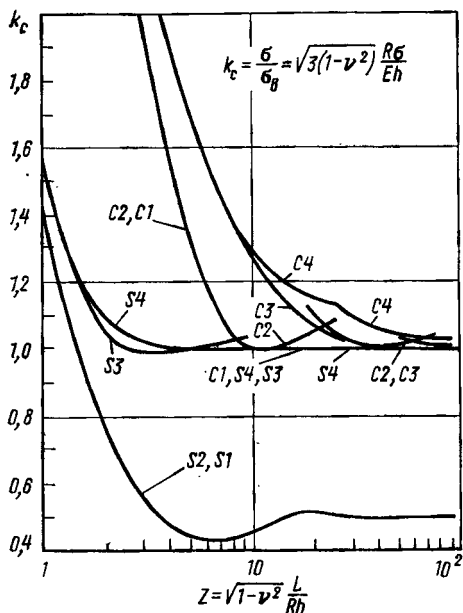


Рис 7.3. Относительные критические усилия сжатия круговой цилиндрической оболочки средней длины при различных граничных условиях.

При дальнейшем увеличении Z величина k_c возрастает, достигая максимума 0,516 при $Z = 20$. Далее величина k_c уменьшается, стремясь к 0,5. При других граничных условиях величина k_c убывает с ростом Z , стремясь к единице. При $Z > 50$ в случаях S1, S2 $k_c = 0,5$, в остальных случаях $k_c = 1$.

Формы потери устойчивости на половине длины оболочки показаны на рис. 7.4. Во всех случаях, исключая S1, S2, число

- S1 $w = w_{xx} = T_1 = S = 0$,
 S2 $w = w_{xx} = u = S = 0$,
 S3 $w = w_{xx} = T_1 = v = 0$,
 S4 $w = w_{xx} = u = v = 0$,
 C1 $w = w_x = T_1 = S = 0$,
 C2 $w = w_x = u = S = 0$,
 C3 $w = w_x = T_1 = v = 0$,
 C4 $w = w_x = u = v = 0$,
 S5 $Q_1 = M_1 = u = v = 0$,
 S6 $Q_1 = M_1 = T_1 = v = 0$.

(2.1)

Результаты расчетов Ямаки и Кодамы [7.32] показаны на рис. 7.3. В диапазоне $Z = 1 \div 50$ величина k_c при граничных условиях S1, S2 сначала убывает с возрастанием Z , достигая минимума 0,428 при $Z = 7$.

полуволн по длине растет с ростом Z . Число волн по окружности при $Z > 50$ равно

$$n \approx 0,903 \sqrt{\frac{R}{h}},$$

что соответствует квадратным вмятинам.

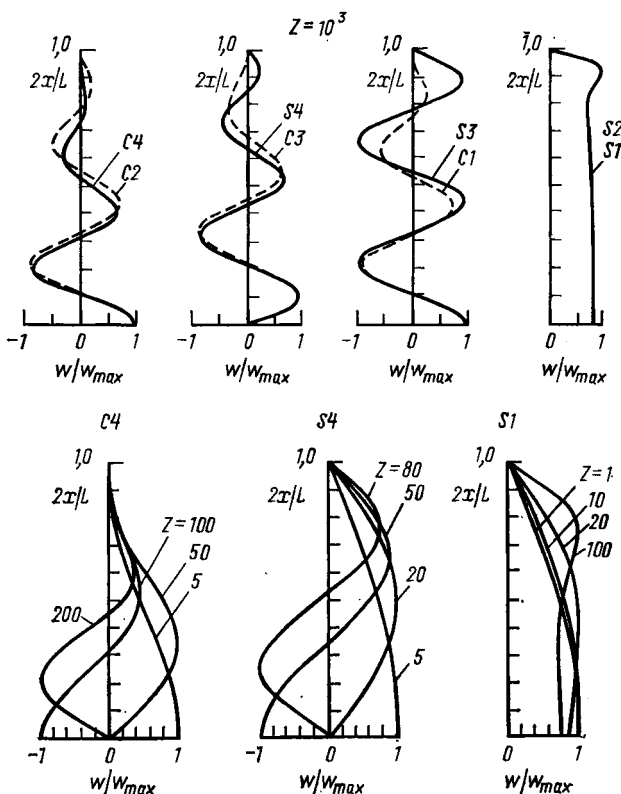


Рис. 7.4. Формы потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки средней длины

В случаях $S1$, $S2$ для очень коротких оболочек форма потери устойчивости примерно такая же, как и в случае $S3$. Однако при $Z > 100$ прогибы локализуются у краев оболочки, в то время как остальная часть оболочки имеет постоянные прогибы величины $0,8 w_{\max}$. При этом $n = 1$.

Полученные результаты применимы для не очень длинных оболочек. Для длинных оболочек необходимо использовать более точные уравнения. Известны решения Симмондса, Даниельсона

[7.49] и Ямаки и Кодамы [7.32]. В работе [7.49] исследовалась оболочка при граничных условиях S1. Результаты показаны на рис. 7.5. Эти результаты близки к результатам работы [7.32], исключая очень короткие оболочки ($Z \leq 4$), у которых наблюдается значительное снижение критического усилия при антисимметричной относительно середины оболочки форме потери устойчивости с $n = 1$. При этом $k_c = Z/4 \sqrt{3}$.

Таким образом, в случае безмоментного докритического состояния снижение критического напряжения наблюдается при

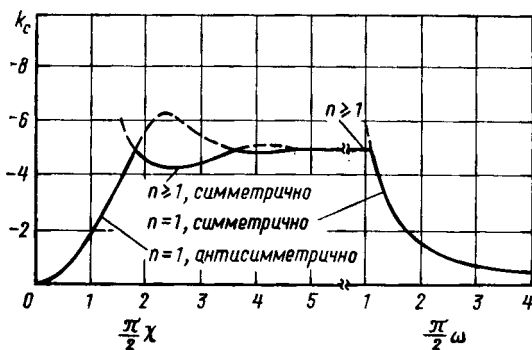


Рис. 7.5. Относительное критическое усилие сжатия круговой цилиндрической оболочки произвольной длины при граничном условии S1.

некоторых специальных граничных условиях. Эти граничные условия на практике в чистом виде не реализуются. Однако влияние их за счет упругости закрепления краев оболочки в какой-то мере может проявляться. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 4.

§ 3. Влияние моментности исходного состояния

1. Осесимметричная деформация

Оболочка, безмоментная в исходном состоянии, является удобной моделью для решения задач устойчивости. В действительности же исходное состояние, как правило, моментное. Изгибы элементов оболочки обуславливаются влиянием краевых условий. Исследуем напряженно-деформированное состояние оболочки при осесимметричном нагружении. Прогибы определяются решением уравнения нелинейного краевого эффекта

$$\omega_{\text{III}}^0 + 4e^2\omega_{\text{II}}^0 + 4k^4\omega^0 = -4k^4\alpha_1 R t - 4\beta_3 N - 4\beta_2 P, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= k^2 N^*, \quad k^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{h^2}, \\ N^* &= \frac{N}{T_B}, \quad T_B = \frac{Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R}, \\ 4\beta_3^4 &= \frac{\nu}{k_2^3 D}, \quad 4\beta_2^4 = \frac{1}{k_2^4 D}, \quad k_2 = \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь α_t — коэффициент линейного расширения материала оболочки, t — температура в °С, P — внутреннее давление. Будем считать, что оболочка достаточно длинная, так что краевые эффекты в ней не перекрываются. Это позволяет вместо всей оболочки рассмотреть ее половину. Поместив начало координаты ξ на крае оболочки, запишем решение уравнения (3.1)

$$w^0 = e^{-a\xi} (A_1 \cos b\xi + A_2 \sin b\xi) + w_6, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} w_6 &= -\alpha_t R t - \left(\frac{\beta_3}{k}\right)^4 N - \left(\frac{\beta_2}{k}\right)^4 P, \\ a &= k\psi_1, \quad b = k\psi_2, \quad \psi_1^2 = 1 - N^*, \quad \psi_2^2 = 1 + N^*. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь w_6 — прогибы безмоментного состояния. Постоянные интегрирования A_1, A_2 определим из граничных условий при $\xi=0$. Будем считать для общности, что оболочка подкреплена на крае упругим шпангоутом (рис. 7.6), симметрично расположенным относительно оболочки.

Условия сопряжения оболочки и шпангоута имеют вид

$$\begin{aligned} w^0 &= \\ &= -\alpha'_p (\omega_{\xi\xi\xi}^0 + 4N^* k^2 w_{\xi}^0) - \alpha'_t R t_{ш}, \\ \omega_{\xi}^0 &= \alpha'_k \omega_{\xi\xi}^0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\alpha'_p = \frac{k_2 D}{E_{ш} F_{ш}}, \quad \alpha'_k = \frac{D}{k_2 E_{ш} I_z}, \quad (3.6)$$

и служат граничными условиями для w^0 . В (3.5) и (3.6) $E_{ш}, F_{ш}, I_z, t_{ш}$ — модуль нормальной упругости, площадь поперечного сечения, момент инерции и температура шпангоута. При $\alpha'_p = 0, \alpha'_k = \infty$ из (3.5) следуют краевые условия для шарнирно опертой, а при $\alpha'_p = \alpha'_k = 0$ — для защемленной на жестком шпангоуте оболочки. Если $\alpha'_p = \alpha'_k = \infty$, оболочка имеет свободные кромки. При выводе условий (3.5) усилие N считалось консервативным по направлению. Если усилие N следящее, то в условиях (3.5) член, содержащий это усилие, пропадает.

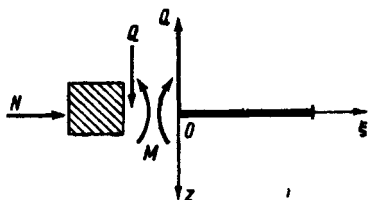


Рис. 7.6. Краевой кольцевой шпангоут с присоединенной полубесконечной оболочкой.

Определив постоянные из уравнений (3.5), найдем

$$w^0 = Af + w_0, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} f &= e^{-a\xi} (\cos b\xi + \alpha_3 \sin b\xi), \quad A = -\alpha_4 (w_0 + \alpha_t R t_{\text{ш}}), \\ \alpha_4 &= \frac{1 + 2\psi_1 \alpha_k}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \alpha_1 \frac{1 + 2\psi_2 \alpha_2 \alpha_k}{1 + 2\psi_1 \alpha_k}, \\ \Delta &= 1 + 2\psi_1 (\alpha_k + \alpha_p) + 2(1 - 2N^*) \alpha_p \alpha_k, \\ \alpha_p &= 2k^3 \alpha'_p, \quad \alpha_k = k \alpha'_k, \quad \alpha_1 = \frac{\psi_1}{\psi_2}, \quad \alpha_2 = -\frac{N^*}{\sqrt{1 - N^{*2}}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Усилие T_2^0 и моменты M_1^0 , M_2^0 определяются выражениями

$$T_2^0 = C_1 f + C_2, \quad M_1^0 = C_3 f_{\xi\xi}, \quad M_2^0 = \nu M_1^0. \quad (3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f &= 2abe^{-a\xi} [(1 + \alpha_2 \alpha_3) \sin b\xi + (\alpha_2 - \alpha_3) \cos b\xi], \\ C_1 &= -k_2 AEh, \quad C_2 = PR, \quad C_3 = -k_2^{\xi} AD. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для жестко защемленной оболочки в полученных формулах следует положить $\alpha_4 = 1$, $\alpha_3 = \alpha_1$; для жестко опертой $\alpha_4 = 1$, $\alpha_3 = \alpha_2$.

Предельную нагрузку на оболочку можно найти, приравняв нулю определитель Δ :

$$1 + 2\psi_1 (\alpha_k + \alpha_p) + 2(1 - 2N^*) \alpha_p \alpha_k = 0. \quad (3.11)$$

Прогибы в этом случае растут до бесконечности. Варьируя α_k , α_p , можно проанализировать влияние различных граничных условий.

1. $\alpha_p = \infty$ (свободная в радиальном направлении упруго защемленная кромка). В этом случае исходное состояние безмоментное. Однородная система условий (3.5) позволяет выразить A_1 через A_2 и тем самым качественно определить форму потери устойчивости. Уравнение (3.11) дает

$$\psi_1 + (1 - 2N^*) \alpha_k = 0. \quad (3.12)$$

Критическая жесткость шпангоута определяется выражением

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{1 - N^*}}{2N^* - 1}. \quad (3.13)$$

При изменении α_k от 0 (жесткое защемление) до ∞ (свободная кромка) критическое усилие N^* меняется соответственно от 1 до 0,5.

2. $\alpha_k = \infty$ (шарнирная кромка с ограниченной подвижностью в радиальном направлении). В этом случае исходное состояние моментное. Уравнение для определения предельной нагрузки, соответствующей бесконечно большим прогибам, имеет анало-

гичный (3.12) вид. Критическая жесткость шпангоута определяется выражением

$$\varphi_1 + (1 - 2N^*)\alpha_p = 0. \quad (3.14)$$

При изменении α_p от 0 (жесткий шарнир) до ∞ (свободная кромка) предельное усилие меняется от 1 до 0,5.

Полученные результаты относятся к случаю консервативной нагрузки N . Если нагрузка следящая, то слагаемое $2N^*$ в равенствах (3.12) — (3.14) пропадает. При этом $N^* \geq 1$. Таким образом, нижний предел N^* для длинных оболочек при осесимметричном выпучивании равен 0,5.

Рассмотрим короткую оболочку. Решение уравнения (3.1) можно представить в форме

$$w^0 = \sum_{i=1}^4 A_i \Phi_i(\xi) + w_6, \quad (3.15)$$

где

$$\Phi_1(\xi) = \operatorname{ch} a\xi \cos b\xi, \quad \Phi_2(\xi) = \operatorname{sh} a\xi \sin b\xi, \quad (3.16)$$

$$\Phi_3(\xi) = \operatorname{ch} a\xi \sin b\xi, \quad \Phi_4(\xi) = \operatorname{sh} a\xi \cos b\xi. \quad (3.17)$$

Для простоты влияние температуры учитывать не будем. Поместим начало продольной координаты в середине оболочки. Условия сопряжения оболочки и шпангоутов при $\xi = \pm\xi_0 = \pm L/2R$ имеют вид

$$w_{\xi}^0 = \mp w_{\xi\xi}^0 \alpha'_k, \quad w^0 = \pm (w_{\xi\xi\xi}^0 + 4k^2 N^* w_{\xi}^0) \alpha'_p. \quad (3.18)$$

Подставляя (3.15) в условие (3.18), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \pm A_1 \{ \alpha'_p [c_3 \Phi_4 - c_4 \Phi_3 + 4k^2 N^* (a\Phi_4 - b\Phi_3)] - \Phi_1 \} \pm \\ & \pm A_2 \{ \alpha'_p [c_3 \Phi_3 + c_4 \Phi_4 + 4k^2 N^* (a\Phi_3 + b\Phi_4)] - \Phi_2 \} + \\ & + A_3 \{ \alpha'_p [c_4 \Phi_1 + c_3 \Phi_2 + 4k^2 N^* (b\Phi_1 + a\Phi_2)] - \Phi_3 \} + \\ & + A_4 \{ \alpha'_p [c_3 \Phi_1 - c_4 \Phi_2 + 4k^2 N^* (a\Phi_1 - b\Phi_2)] - \Phi_4 \} = \pm w_6, \quad (3.19) \\ & A_1 [a\Phi_4 - b\Phi_3 + \alpha'_k (c_1 \Phi_1 - c_2 \Phi_2)] + \\ & + A_2 [a\Phi_3 + b\Phi_4 + \alpha'_k (c_2 \Phi_1 + c_1 \Phi_2)] \pm \\ & \pm A_3 [a\Phi_2 + b\Phi_1 + \alpha'_k (c_1 \Phi_3 + c_2 \Phi_4)] \pm \\ & \pm A_4 [a\Phi_1 - b\Phi_2 + \alpha'_k (c_1 \Phi_4 - c_2 \Phi_3)] = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= a^2 - b^2, \quad c = 2ab, \quad c_3 = ac_1 - bc_2, \quad c_4 = ac_2 + bc_1, \\ \Phi_i &= \Phi_i(\xi_0) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Знаки $\pm$ перед коэффициентами A_i указывают на то, что система (3.19) распадается на две независимые системы, соответствующие симметричной и несимметричной относительно середины оболочки частям решения (3.15). Первая система описывает или изгиб оболочки, если $\alpha'_p \neq \infty$, или появление смежной с безмоментной формы равновесия, соответствующей выпучиванию, если $\alpha'_p = \infty$. Разрешая систему относительно A_1, A_2 , получаем:

$$A_1 = -\frac{\Psi_1 \omega_6}{\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{\Psi_3 \omega_6}{\Delta_1}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Psi_2 \Psi_3 - \Psi_1 \Psi_4 = k \{ 2\alpha_p [\psi_1 \psi_2 \Phi_5 + \alpha_k [\psi_2 (1 - 2N^*) \Phi_6 + \\ &\quad + \psi_1 (1 + 2N^*) \Phi_7]] + \psi_1 \Phi_7 + \psi_2 \Phi_6 + 2\alpha_k \psi_1 \psi_2 \Phi_8 \}, \\ \Psi_1 &= \alpha'_p (c_3 \Phi_4 - c_4 \Phi_3) + \alpha_n (a \Phi_4 - b \Phi_3) - \Phi_1, \\ \Psi_2 &= \alpha'_p (c_3 \Phi_3 + c_4 \Phi_4) + \alpha_n (a \Phi_3 + b \Phi_4) - \Phi_2, \\ \Psi_3 &= a \Phi_4 - b \Phi_3 + \alpha'_k (c_1 \Phi_1 - c_2 \Phi_2), \\ \Psi_4 &= a \Phi_3 + b \Phi_4 + \alpha'_k (c_1 \Phi_2 + c_2 \Phi_1), \\ \Phi_5 &= \text{sh}^2 a \xi_0 + \sin^2 b \xi_0, \quad \Phi_6 = \text{ch} a \xi_0 \text{sh} a \xi_0, \\ \Phi_7 &= \sin b \xi_0 \cos b \xi_0, \\ \Phi_8 &= \text{sh}^2 a \xi_0 + \cos^2 b \xi_0, \quad \alpha_n = 4k^2 N^* \alpha'_p. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Если определитель системы Δ_1 обращается в нуль, то прогибы моментного состояния стремятся к бесконечности, а безмоментное состояние сменяется моментным. Уравнение $\Delta_1 = 0$ дает возможность найти критическую нагрузку. Варьируя жесткостные параметры колец, можно исследовать влияние различных граничных условий.

1. Свободная в радиальном направлении упруго защемленная кромка ($\alpha_p = \infty$)

$$\Delta_1 = \psi_1 \psi_2 \Phi_5 + \alpha_k [\psi_2 (1 - 2N^*) \Phi_6 + \psi_1 (1 + 2N^*) \Phi_7] = 0. \quad (3.23)$$

При $\alpha_k = 0$ (жесткое на кручение кольцо) $N^* = 1$, при $\alpha_k = \infty$ (свободная кромка)

$$\psi_2 (1 - 2N^*) \Phi_6 + \psi_1 (1 + 2N^*) \Phi_7 = 0. \quad (3.24)$$

Для коротких оболочек ($\xi_1 \leq 2$), разлагая функции Φ_6, Φ_7 в ряды Маклорена и ограничиваясь третьими и четвертыми степенями аргумента, получаем из (3.24) соответственно формулы:

$$N^* = \frac{2}{\xi_1^2}, \quad N = \frac{6}{\xi_1^2} - \left(\frac{12}{\xi_1^4} - \frac{1}{5} \right)^{1/2}, \quad \xi_1 = \frac{L}{R} \left(\frac{R}{h} \right)^{1/2} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}. \quad (3.25)$$

Для длинных оболочек, положив $\Phi_7 \ll \Phi_6$, $\Phi_5 = \Phi_6$, из уравнения (3.23) получим (3.12). Решение уравнения (3.23) показано на рис. 7.7, а.

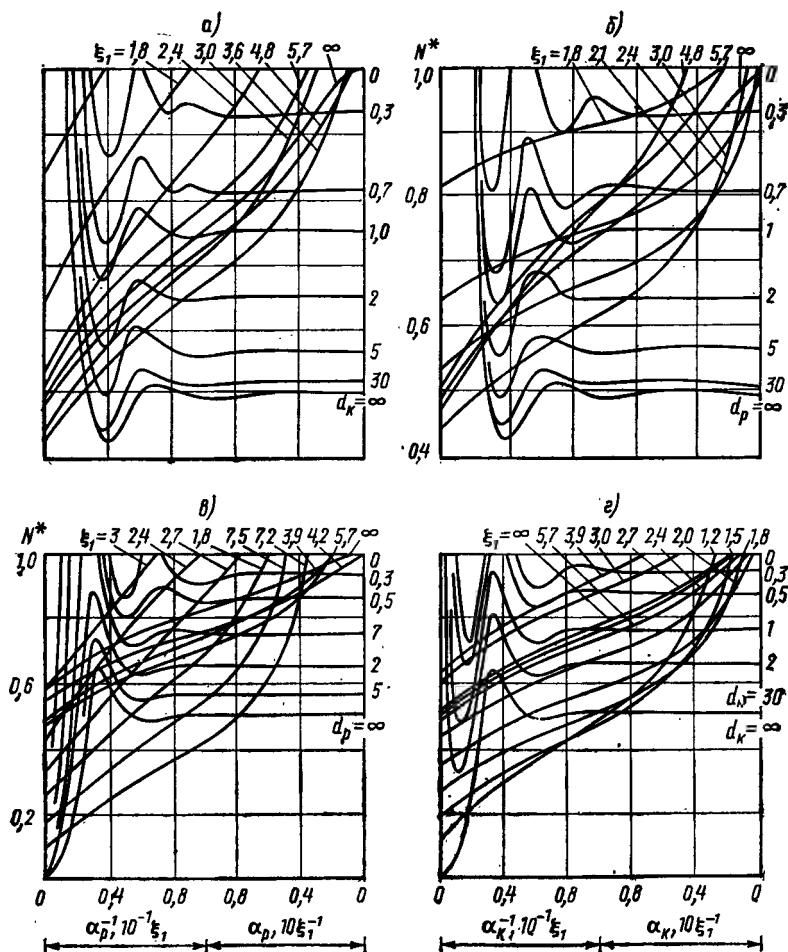


Рис. 7.7. Относительные критические усилия сжатия оболочки с упругими краевыми кольцами при симметричной относительно середины оболочки а, б и кососимметричной в, г формах потери устойчивости.

2. Шарнирная опора, податливая в радиальном направлении ($\alpha_K = \infty$),

$$\Delta_1 = \psi_1 \psi_2 \Phi_8 + \alpha_p [\psi_2 (1 - 2N^*) \Phi_6 + \psi_1 (1 + 2N^*) \Phi_7] = 0. \quad (3.26)$$

При $\alpha_p = 0$ (жесткий шарнир) $N^* = 1$. Для длинных оболочек из уравнения (3.26) следует (3.14). Решение уравнения (3.26) показано на рис. 7.7, б.

Система уравнений, соответствующая несимметричной части прогиба (3.15), однородная. Она имеет решение только в случае равенства нулю ее определителя

$$\Delta_2 = k \{ 2\alpha_p [\psi_2 (1 - 2N^*) \alpha_k \Phi_6 - \psi_1 \alpha_k (1 + 2N^*) \Phi_7 + \psi_1 \psi_2 \Phi_8] + \\ + 2\alpha_k \psi_1 \psi_2 \Phi_5 + \psi_2 \Phi_6 - \psi_1 \Phi_7 \} = 0. \quad (3.27)$$

В этом случае от симметричной изгибной формы равновесия отвечаются бесконечно близкие к ней кососимметричные формы, характеризующие потерю устойчивости оболочки. Как и раньше, рассмотрим два случая. Случай 1:

$$\Delta_2 = \psi_1 \psi_2 \Phi_8 + \alpha_k [\psi_2 (1 - 2N^*) \Phi_6 - \psi_1 (1 + 2N^*) \Phi_7] = 0. \quad (3.28)$$

При $\alpha_k = 0$, $N^* = 1$, при $\alpha_k = \infty$ имеем

$$\psi_2 (1 - 2N^*) \Phi_6 - \psi_1 (1 + 2N^*) \Phi_7 = 0. \quad (3.29)$$

Для коротких оболочек ($\xi_1 \leq 2$), разлагая функции Φ_6 и Φ_7 в ряды Маклорена и ограничиваясь третьими степенями аргумента, получаем из (3.27)

$$N^* = \frac{3}{\xi_1^2} - \left(\frac{9}{\xi_1^4} - \frac{1}{2} \right)^{1/2}. \quad (3.30)$$

Решение уравнения (3.28) показано на рис. 7.7, г.

В случае 2 (рис. 7.7, в)

$$\Delta_2 = \psi_1 \psi_2 \Phi_5 + \alpha_p [\psi_2 (1 - 2N^*) \Phi_6 - \psi_1 (1 + 2N^*) \Phi_7] = 0. \quad (3.31)$$

При $\alpha_p = 0$, как и при изгибе, $N^* = 1$. Для длинных оболочек из (3.28), (3.31) имеем уравнения (3.12), (3.14).

Из рис. 7.7 можно получить полную информацию о влиянии жесткости колец при осесимметричном выпучивании. При симметричном по длине оболочки выпучивании для длинной оболочки со свободными краями ($\alpha_k = \alpha_p = \infty$) $N^* = 0,5$. В области малых значений параметра ξ_1 (короткие оболочки) имеется провал кривых, величина N^* снижается до 0,425. При кососимметричном по длине выпучивании для длинной оболочки со свободными кромками, как и при симметричном выпучивании, $N^* = 0,5$. В области коротких оболочек наблюдается сначала возрастание, а потом резкое падение величин N^* до значений, близких к нулю. С уменьшением α_p , α_k величина N^* в обоих случаях растет, стремясь к своему предельному значению $N^* = 1$, соответствующему бесконечной жесткости кольца.

Оценим практическую возможность снижения критического усилия за счет податливости опор на примере кольца квадрат-

ного поперечного сечения размером d . В этом случае

$$\alpha_p = \frac{1}{2\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{R}{h}\right)^{1/2} \left(\frac{h}{d}\right)^2, \quad \alpha_k = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{1-\nu^2} \left(\frac{R}{h}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{d}\right)^4. \quad (3.32)$$

При $R/h = 900 \div 100$ и $\nu = 0,3$ имеем

$$\alpha_k = (2020 \div 1335) (h/d)^4, \quad \alpha_p = (1224 \div 4,12) (h/d)^2. \quad (3.33)$$

Очевидно, что лимитирует снижение усилия величина α_p . Если, например, $d/h = 5$, то $\alpha_p = 0,4896 \div 0,1648$. При этом для длинных оболочек $N^* = 0,88 \div 0,990$, для очень коротких оболочек $N^* = 0,83 \div 0,95$ соответственно. Таким образом, эффект свободных краев у оболочек с кольцами при осесимметричном выпучивании почти не проявляется. Так что практически $N^* = 1$. Эта формула недостаточна для оценки несущей способности оболочки. При определенных сочетаниях N , l , R оболочка может быть пластически деформирована задолго до того, как усилие N^* достигнет единицы. Оболочка теряет несущую способность с образованием осесимметричных складок.

Таким образом, при осесимметричной форме потери устойчивости снижения критических напряжений за счет влияния изгиба в докритическом состоянии не наблюдается. Изгиб оказывает существенное влияние на несущую способность оболочки. За счет развития пластических деформаций оболочка может разрушиться по осесимметричной форме при средних напряжениях, меньших (1.5). Что касается неосесимметричной формы потери устойчивости, то соответствующие ей критические напряжения могут быть снижены, по сравнению с классическим, как за счет развития пластических деформаций у краев, так и за счет деформаций и напряжений краевого эффекта в упругой зоне. Возникает более сложная задача о ветвлении моментных форм равновесия. Эта задача будет рассмотрена ниже.

2. Неосесимметричная форма потери устойчивости

По-видимому, впервые неосесимметричная форма с учетом моментности исходного состояния изучалась в работах Х. М. Муштары, С. В. Прохорова [16.7], [2.7]. Фишер [10.6], исследуя эту же задачу методом конечных разностей для оболочки с $R/h = 800$, $L/R = 0,865$ при граничных условиях классического шарнирного опирания, получил снижение критической нагрузки на 15%. В другой работе Фишера [10.7] рассмотрены два случая граничных условий: $C3$, $S3$. В широком диапазоне изменения параметров R/h , L/R показано, что минимальная

критическая нагрузка при $\chi \geq 9$ и 15,5 соответственно случаям S3 и C3 не зависит от длины. Для защемленных оболочек (случай C3) при $\chi > 209$ получено $k_c = 0,92$, для опертых оболочек (случай S3) — $k_c = 0,84$.

Детальное исследование этой задачи получено Альмротом [6.24], который рассмотрел граничные условия S1 — S4, C1 — C4 в диапазоне изменения параметров $R/h = 10^2 \div 10^4$, $L/R = 0,07 \div 3,2$. Уравнения Доннелла решались методом конечных разностей. Показано, что учет моментности докритического состояния в случаях S1, S2 не сказывается на величине критической нагрузки: как и для безмоментного исходного состояния, была получена величина $k_c = 0,5$. В остальных шести случаях критическая нагрузка снижалась. Величины k_c для случаев S4, S3, C4, C3, C2, C1 равнялись соответственно 0,863—0,874, 0,805—0,849, 0,907—0,930, 0,908—0,917, 0,907—0,0930, 0,906—0,913. Таким образом, наибольшее снижение нагрузки достигало двадцати процентов. Число воли n , соответствующее минимуму нагрузки, равнялось двум в случаях S1, S2, в остальных случаях $n = 8 \div 85$. При этом n растет с увеличением R/h и почти не реагирует на изменение L/R .

В работе [6.24] исследовано также влияние длины оболочки. Во всех случаях, за исключением очень коротких оболочек, параметр критической нагрузки k_c почти не зависит от длины и относительной толщины оболочки h/R . Таким образом, учет влияния граничных условий привел к значительному уточнению классического решения. Однако отмеченные эффекты влияния граничных условий недостаточны для объяснения существенно расхождения теории и эксперимента.

§ 4. Влияние упругости опор

В предыдущих параграфах было показано, что в случае граничных условий S1, S2, когда край оболочки свободно смещается в окружном направлении, критическое усилие сжатия вдвое меньше классического критического усилия. Такие граничные условия в чистом виде на практике не встречаются. Отмеченный эффект снижения устойчивости оболочки, по-видимому, может проявляться только за счет податливости опор в результате их деформации. Поэтому интересно выяснить, насколько ответственно упругость опор за снижение критических усилий, наблюдаемое в эксперименте. Этот вопрос исследуем конечно-разностным методом на примере оболочки, имеющей на краю кольца, податливые в окружном направлении [21.7]. Граничные условия на крае примем в виде

$$\omega = \omega_{xx} = F_{yy} = F_{xy} - EF_2 v_{yy} = 0, \quad (4.1)$$

где F_2 — площадь поперечного сечения кольца. В середине оболочки поставим условия косо́й симметрии:

$$w = w_{xx} = v_y = F_{yy} = 0. \quad (4.2)$$

В этом случае в формулах (4.21) гл. VI $G_m = 0$, $D_m = 1$. В исходном состоянии оболочка свободно оперта ($w^0 = w_{xx}^0 = 0$). Прогибы и окружные усилия исходного состояния определяются решением § 3

$$w^0 = -R\nu N^* (1 - f_1) k^{-2}, \quad T_2^0 = -\nu N^* T_b f_1, \quad (4.3)$$

где

$$f_1 = e^{-a\xi} (\cos b\xi + \alpha_2 \sin b\xi), \quad a = k\psi_1, \quad b = k\psi_2,$$

$$\psi_1^2 = 1 - N^*, \quad \psi_2^2 = 1 + N^*, \quad \xi = x/R, \quad T_b = \frac{Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R}, \quad (4.4)$$

$$\alpha_1 = \frac{\psi_1}{\psi_2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 - \frac{1}{\alpha_1} \right), \quad k^2 = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{h}, \quad N^* = \frac{N}{T_b}.$$

Результаты расчетов для оболочки, имеющей $\eta_m = 30$, при $m = 400$ показаны на рис. 7.8 сплошными линиями, при этом

$$k_s = \frac{F_2}{h^2} \sqrt{\frac{h}{R}} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)}. \quad (4.5)$$

На рис. 7.9 показаны типичные кривые минимизации N^* по β . Кривые состоят из двух ветвей. Правая ветвь имеет минимум при больших β . На левой ветви усилие N^* уменьшается с уменьшением β . При $k_s = 1$ наименьшие значения N^* обеих ветвей равны. При других

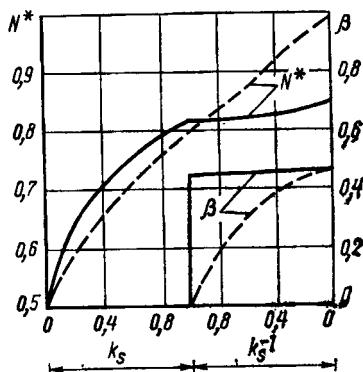


Рис. 7.8. Относительные критические усилия сжатия оболочки в зависимости от коэффициента упругости заделки в окружном направлении.

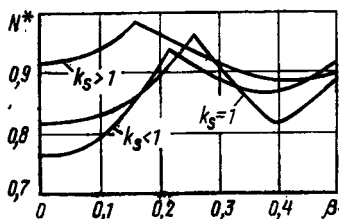


Рис. 7.9. Зависимость усилия сжатия от параметра окружных волн и коэффициента упругости заделки.

значениях k_s наименьшие значения N^* на правой и левой ветвях не равны. Если $k_s < 1$, то наименьшую величину дает левая ветвь. В этом случае оболочка теряет устойчивость преимущественно без растяжения срединной поверхности с образованием

двух волн по окружности ($n = 2$). Критическое усилие сжатия при этом (рис. 7.8) интенсивно уменьшается с уменьшением k_s , стремясь к предельному значению $N^* = 0,5$. Этот результат, соответствующий свободным кромкам, получил Охира. При $k_s > 1$ наименьшую величину k_s дает правая ветвь, оболочка теряет устойчивость с образованием большого числа волн по окружности при значительной деформации срединной поверхности. Значение $k_s = 1$ является предельным, в этой точке происходит обмен формами потери устойчивости. При $k_s > 1$ критическое усилие растет с увеличением k_s , стремясь к предельному значению 0,85, полученному Фишером [10.6]. На рис. 7.8 пунктиром даны результаты, полученные при безмоментном исходном состоянии.

Таким образом, значительное снижение критического усилия за счет податливости заделки в окружном направлении возможно при значениях $k_s < 1$. Например, для кольца квадратного поперечного сечения с размерами $d \times d$ согласно этому неравенству имеем $d/h < (R/h)^{1/4} [12(1 - \nu^2)]^{-1/8}$. При конструировании оболочек важно обеспечить $k_s > 1$. Этим исключается опасная форма потери устойчивости с числом волн по окружности, равным двум, и, следовательно, обеспечивается высокое значение критического усилия. В оболочках, применяемых на практике, обычно неравенство $k_s > 1$ выполняется, так что отмеченный эффект снижения критических усилий не проявляется.

§ 5. Оболочка, подкрепленная по краям упругими кольцами

Уравнения колец. Выпишем основные уравнения колец, используя теорию криволинейных стержней:

нелинейные уравнения равновесия Клебша — Кирхгоффа [2.14]

$$\begin{aligned} \sum X &= N'_1 - N_2 \chi_1 + N_3 \beta'_k + q_1 = 0, \\ \sum Y &= N'_2 - N_3 (k_2 + \chi_2) + N_1 \chi_1 + q_2 = 0, \\ \sum Z &= N'_3 + N_2 (k_2 + \chi_2) - N_1 \beta'_k + q_3 = 0, \\ \sum M_x &= G'_1 - G_2 \chi_1 + G_3 \beta'_k + N_3 + m_1 = 0, \\ \sum M_y &= G'_2 - G_3 (k_2 + \chi_2) + G_1 \chi_1 + m_2 = 0, \\ \sum M_z &= G'_3 - G_1 \beta'_k + G_2 (k_2 + \chi_2) - N_1 + m_3 = 0; \end{aligned} \quad (5.1)$$

соотношения упругости

$$N_i = EF_2 \varepsilon_2, \quad G_1 = EI_1 \chi_2, \quad G_2 = GI_k \tau, \quad G_3 = EI_3 \chi_1; \quad (5.2)$$

компоненты деформации

$$\varepsilon_2 = v' - k_2 \omega, \quad \chi_1 = -u'' + k_2 \beta_k, \quad \chi_2 = \omega'' + k_2 v', \quad \tau = \beta_k' + k_2 u'. \quad (5.3)$$

Здесь N_i , G_i , q_i , m_i — внутренние усилия, моменты и внешние следящие погонные нагрузки (рис. 7.10); EF_2 — жесткость кольца на растяжение; EI_1 , EI_3 , GI_k — изгибные жесткости кольца относительно его главных осей и жесткость на кручение; u , v — смещения по осям x и y ; β_k — угол закручивания; k_2 — кривизна средней линии кольца, равная кривизне k_2 срединной поверхности оболочки. Штрихи означают дифференцирование по дуговой координате y . Опуская неглавные нелинейные слагаемые и исключая N_1 , N_3 , получаем из (5.1) линейаризованные уравнения для определения исходного состояния кольца

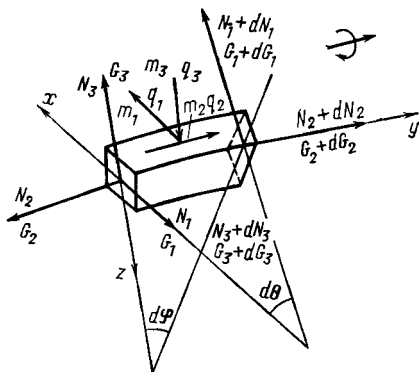


Рис. 7.10 Элемент кольца в деформированном состоянии.

$$\begin{aligned} \sum X &= G_3^{0'} + k_2 G_2^{0'} + m_3^0 + q_1^0 = 0, \\ \sum Y &= N_2^{0'} + k_2 G_1^{0'} + k_2 m_1^0 + q_2^0 = 0, \\ \sum Z &= G_1^{0''} - k_2 N_{2m}^0 - N_{26}^0 \chi_2^0 + q_3^0 + m_1^{0'} = 0, \\ \sum M_y &= G_2^0 - k_2 G_3^0 + m_2^0 = 0, \\ N_2^0 &= N_{26}^0 + N_{2m}^0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где N_{26}^0 , N_{2m}^0 — безмоментная и моментная составляющие N_2^0 .

При осесимметричном докритическом состоянии ($q_1^0 = q_2^0 = N_{2m}^0 = m_1^0 = m_3^0 = \chi_2^0 = 0$, $N_2^0 = N_{26}^0$) система (5.4) сводится к двум уравнениям

$$\sum Z = k_2 N_2^0 + q_3^0 = 0, \quad \sum M_y = k_2 G_3^0 - m_2^0 = 0. \quad (5.5)$$

Уравнения устойчивости колец получим на основе статического критерия. При этом, имея в виду совместную работу колец с оболочкой, считаем внешние нагрузки варьируемыми величинами. В этом случае они будут силами взаимодействия оболочки с кольцами. Линейаризуя уравнения (5.1) и опуская

некоторые малые слагаемые, содержащие компоненты деформаций исходного состояния, получаем уравнения в вариациях:

$$\begin{aligned} N'_1 - N_2^0 \chi_1 - N_2 \chi_1^0 + q_1 &= 0, \\ N'_2 - N_3 (k_2 + \chi_2^0) - N_3^0 \chi_2 + q_2 &= 0, \\ N'_3 + k_2 N_2 + N_2^0 \chi_2 + N_2 \chi_2^0 + q_3 &= 0, \\ G'_1 + N_3 + m_1 &= 0, \\ G'_2 - k_2 G_3 + m_2 &= 0, \\ G'_3 + k_2 G_2 - N_1 + m_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Исключая поперечные силы N_1 , N_3 , получаем

$$\begin{aligned} N'_2 + G'_1 (k_2 + \chi_2^0) - N_3^0 \chi_2 + q_2 + k_2 m_1 &= 0, \\ G''_1 - N_2 (k_2 + \chi_2^0) - N_2^0 \chi_2 - q_3 + m'_1 &= 0, \\ G''_3 + k_2 G'_2 - N_2^0 \chi_1 - N_2 \chi_1^0 + q_1 + m'_3 &= 0, \\ G'_2 - k_2 G_3 + m_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Первые два уравнения служат для исследования устойчивости кольца в его плоскости, вторые два — в перпендикулярной плоскости. Если кольцо не связано с оболочкой, то в уравнениях (5.7)

$$q_i = m_i = 0.$$

Неосесимметричная форма потери устойчивости. Для исследования этой задачи используем решение гл. VI в конечных разностях. Исходное состояние оболочки было определено в § 3. Считая оболочку достаточно длинной, рассмотрим ее половину, поместив начало координат на левом шпангоуте. В этом случае в выражениях (4.2) гл. VI

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\alpha_4 e^{-a\eta} (\cos b\eta + \alpha_3 \sin b\eta), \\ f_2 &= -2\alpha_4 (1 + \alpha_2^2)^{-1} e^{-a\eta} [(1 + \alpha_2 \alpha_3) \sin b\eta + (\alpha_2 - \alpha_3) \cos b\eta], \\ \alpha_4 &= \frac{1 + \psi_1 \alpha_k^*}{\Delta_1}, \quad \alpha_3 = \alpha_1 \frac{1 + \psi_2 \alpha_2 \alpha_k^*}{1 + \psi_1 \alpha_k^*}, \quad \alpha_2 = -\frac{N^*}{\sqrt{1 - N^{*2}}}, \quad \alpha_1 = \frac{\psi_1}{\psi_2}, \\ a &= k_1 \psi_1, \quad b = k_1 \psi_2, \quad \alpha_p^* = 2\alpha_p, \quad \alpha_k^* = 2\alpha_k, \\ \Delta_1 &= 1 + \psi_1 (\alpha_k^* + \alpha_p^*) + (1/2 - N^*) \alpha_p^* \alpha_k^*. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В решении гл. VI необходимо изменить граничные условия, в качестве которых следует взять уравнения устойчивости колец (5.7) с учетом условий их сопряжения с оболочкой. Нагруз-

ки в уравнениях (5.7) заменяются реакциями оболочки на кольцо (рис. 7.11)

$$\begin{aligned} q_1 &= T_1 = F_{yy}, \quad q_2 = S = -F_{xy} - k_2 H, \\ Q &= q_3 = Q_1 + H_y + T_1^0 w_x + F_{yy} w_x^0, \\ m_1 &= 0, \quad m_3 = 0, \quad m_2 = M_1, \\ M_1 &= -D(w_{xx} + \nu w_{yy}), \quad H = -D(1 - \nu) w_{xy}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Приравняв смещения кольца смещениям оболочки и выражая угол закручивания β_k через w_x :

$$\beta_k = -w_x, \quad (5.11)$$

получаем из системы уравнений (5.7) граничные условия

$$\begin{aligned} EF_2 k_2^2 (v_{\varphi\varphi} - w_{\varphi}) + \\ + k_2^4 EI_1 (w_{\varphi} + v)_{\varphi\varphi} - \\ - k_2^2 F_{\xi\varphi} + D(1 - \nu) k_2^3 w_{\xi\varphi} = 0, \\ k_2^2 EF_2 (v_{\varphi} - w) - \\ - EI_1 k_2^4 (w_{\varphi} + v)_{\varphi\varphi\varphi} + k_2^2 N_2^0 w_{\varphi\varphi\varphi} - \\ - \{Dk_2^3 [w_{\xi\xi\xi} + (2 - \nu) w_{\xi\varphi\varphi}] + \\ + Nk_2 w_{\xi} - k_2^3 F_{\varphi\varphi} w_{\xi}^0\} = 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} k_2^2 GI_{\kappa} (u_{\varphi\varphi} - w_{\xi\varphi\varphi}) - \\ - k_2^4 EI_3 (u_{\varphi\varphi} + w_{\xi})_{\varphi\varphi} + \\ + k_2^2 N_2^0 (u_{\varphi\varphi} + w_{\xi}) + k_2^2 F_{\varphi\varphi} = 0, \\ k_2^3 GI_{\kappa} (u - w_{\xi})_{\varphi\varphi} + \\ + k_2^3 EI_3 (u_{\varphi\varphi} + w_{\xi}) - \\ - k_2^2 D (w_{\xi\xi} + \nu w_{\varphi\varphi}) = 0, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ S \\ Q \\ M_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{14} \\ 0 & C_{22} & C_{23} & 0 \\ 0 & C_{32} & C_{33} & 0 \\ C_{41} & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\varphi\varphi} \\ v_{\varphi} \\ w \\ w_{\xi} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= k_2^2 (k_2^2 GI_{\kappa} + N_2^0) - k_2^4 EI_3 ()_{\varphi\varphi}, \\ C_{14} &= -k_2^4 (CI_{\kappa} + EI_3) ()_{\varphi\varphi} + k_2^2 N_2^0, \\ C_{22} &= k_2^2 E (F_2 + k_2^2 I_1) ()_{\varphi}, \\ C_{23} &= k_2^2 E [k_2^2 I_1 ()_{\varphi\varphi\varphi} - F_2 ()_{\varphi}] + k_2^3 D (1 - \nu) ()_{\xi\varphi}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

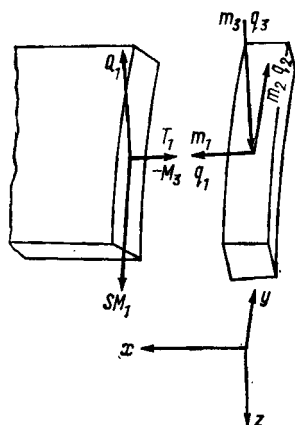


Рис. 7.11. Сопряжение кольца с оболочкой.

$$\begin{aligned}
 C_{32} &= k_2^* E [F_2 - k_2^2 I_1 ()_{\Phi\Phi}], \\
 C_{33} &= k_2^2 N_2^0 ()_{\Phi\Phi} - k_2^2 E [F_2 + k_2^2 I_1 ()_{\Phi\Phi}], \\
 C_{41} &= k_2^3 (GI_k + EI_3), \quad C_{44} = k_2^3 [EI_3 - GI_k ()_{\Phi\Phi}], \\
 N_2^0 &= -k_2 E F_2, \quad \omega^0 = k_2^2 D \omega_{\xi\xi\xi}^0 + N \omega_{\xi}^0.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Используя подстановку (4.2), (4.4) гл. VI и аппроксимируя производные разностями (4.8) гл. VI приведем (5.13) к виду (4.15) гл. VI. В середине оболочки будем выполнять или условия симметрии (4.27), или условия косой симметрии (4.28) гл. VI. Результаты расчетов В. В. Кабанова [7.4] на ЭВМ показаны на рис. 7.12, 7.13 для оболочки с $R/h = 100$.

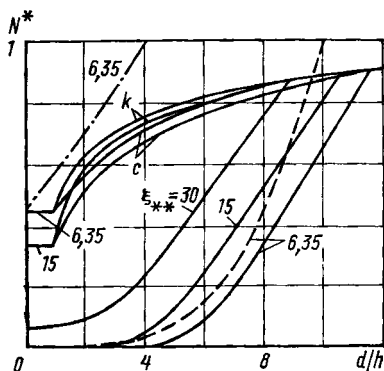


Рис. 7.12. Относительные критические усилия сжатия при неосесимметричной форме потери устойчивости оболочки с упругими краевыми кольцами

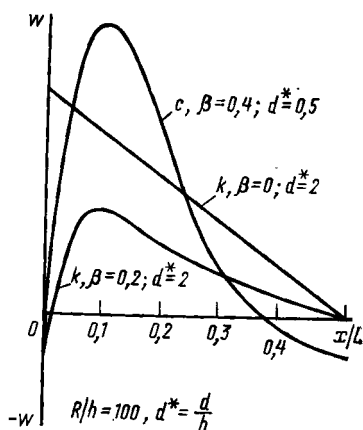


Рис. 7.13. Формы потери устойчивости оболочки с упругими кольцами.

На рис. 7.12 приведены значения N^* в зависимости от отношения $d^* = d/h$, где d — размер квадратного поперечного сечения кольца. Кривые c соответствуют симметричному относительному сдвигу середины оболочки выпучиванию. По окружности в этом случае образуется значительное ($n > 2$) число волн. По длине прогибы затухают. В диапазоне $d^* = 0 \div 1$ величина $N^* = 0,45$ при $\xi_{**} = \eta_m/2 = 6,35$ и $N^* = 0,35$ при $\xi_{**} = 15$. Первая величина согласуется с результатом [7.44], вторая с результатом [7.15]. При $d^* > 12$ кривые выходят на асимптоту $N^* = 0,92$. Это значение соответствует критическому усилию оболочки, защемленной на жестком кольце. Нижние три кривые

соответствуют кососимметричному выпучиванию. В этом случае $n = 2$. Поперечное сечение деформируется в эллипс. Этой форме потери устойчивости отвечают низкие значения критических усилий, особенно у коротких оболочек. С увеличением длины оболочки критические усилия возрастают. Область возможных значений N^* ограничивается сверху кривой c для $\xi_{**} = 15$. Кривые k получены при условиях (4.28), в которых условие $F_{\varphi\varphi} = 0$ было заменено условием $u_{\varphi\varphi} = 0$. Нижний участок кривой $\xi_{**} = 6,35$ дает результат [7.15]. Пунктиром и штрих-пунктиром на рис. 7.12 показаны соответственно результаты [7.15], полученные при безмоментном докритическом состоянии. На рис. 7.13 на половине длины оболочек показаны формы потери устойчивости.

Из полученных результатов видно, что снижение критического усилия сжатия за счет податливости колец существенно только у очень коротких оболочек, теряющих устойчивость по кососимметричной относительно середины оболочки форме. У оболочек средней длины интенсивное уменьшение усилия наблюдается при малых d^* . На практике жесткости колец намного превышают эти значения, так что эффект свободных краев, как и при осесимметричном выпучивании, почти не проявляется.

§ 6. Нелинейная задача

Значительное расхождение результатов линейной теории устойчивости и эксперимента вызвало необходимость обратиться к решению нелинейных уравнений. Большинство решений нелинейных уравнений было получено в первом приближении при аппроксимации функции прогиба тремя-четырьмя членами тригонометрического ряда

$$w = \sum_j \sum_k a_{jk} \cos \lambda_j \xi \cos n\varphi. \quad (6.1)$$

Отношение нижнего критического напряжения к верхнему в этих решениях изменялось от 0,3 до 0,55. Позже, когда благодаря ЭВМ появилась возможность повысить порядок аппроксимации функции прогиба, было показано [7.13, 7.29, 7.50, 7.33], что это отношение существенно изменяется при увеличении числа удерживаемых в ряде (6.1) членов. История этого вопроса показана в табл. 7.1. Увеличение числа варьируемых параметров привело к снижению величины $k_{\text{сн}}$ до 0,07. Из таблицы видно, что прогибы, соответствующие нижней критической нагрузке, имеют большую величину. Для практики они вряд ли представляют интерес. К тому же уравнения Доннелла при таких смещениях, по-видимому, использовать нельзя.

Т А Б Л И Ц А 7.1

№ п/п	Коэффициенты в ряде (6.1)	Авторы	Отношение нижнего критического напряжения к верхнему $k_{сн} = \sigma_{н}/\sigma_{в}$	Отношение амплитуды прогиба к толщине оболочки a	Год	Число свободных параметров	Примечание
1	a_{11}, a_{20}	Доннелл	—	—	1934	—	
2	$a_{00}, a_{11}, a_{20}, a_{02}$	Карман—Цзян	0,319		1941	3	$a_{20} = a_{02}$
3	$a_{00}, a_{11}, a_{20}, a_{02}$	Леггет — Джонс	0,321		1942	4	$a_{20} = a_{02}$
4	$a_{00}, a_{11}, a_{20}, a_{02}$	Мнхельсон	0,321		1948	4	$a_{20} = a_{02}$
5	$a_{00}, a_{11}, a_{20}, a_{02}$	Кемпнер	0,300	8	1954	5	
6	$a_{00}, a_{11}, a_{20}, a_{02}, a_{22}$	Агамиров	0,55		1956	4	$a_{22} = a_{20} = a_{02}$
7	a_{00}, a_{11}, a_{20}	Бурдин	0,305		1959	3	
8	$a_{00}, a_{11}, a_{20}, a_{22}, a_{40}$	Альмрот	0,156	23	1963	6	
9	То же n a_{33}, a_{60}	»	0,130	44	1963	8	
10	То же n a_{31}, a_{13}, a_{02}	»	0,108		1963	11	
11	$a_{00}, a_{11}, a_{02}, a_{20}, a_{13}, a_{31}$	Собей	0,948		1964	7	
12	То же n $a_{22}, a_{40}, a_{04}, a_{24}, a_{42}, a_{15}, a_{51}, a_{06}, a_{60}, a_{53}, a_{44}, a_{26}, a_{62}, a_{11}, a_{20}$	»	0,085		1964	26	
13	$a_{00}, a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{20}, a_{40}, a_{60}, a_{13}, a_{31}$	Хофф — Мадсен—Мейерс	0,041	50	1966	10	Значения $k_{сн}$ соответствуют $\varepsilon R/h = 3,4$
14	То же n a_{44}, a_{80}	» » »	0,116	90	1966	12	
15	То же n a_{55}, a_{100}	» » »	0,087	152	1966	14	
16	То же n a_{88}, a_{120}	» » »	0,070	236	1966	16	
17	$a_{00}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{22}, a_{33}, a_{40}$	Джонс	0,185		1966	7	

Из изложенного ясно, что нижняя критическая нагрузка, полученная в отмеченных решениях уравнений Доннелла и эквивалентных им вариационных уравнений, не может быть принята в качестве оценки устойчивости оболочки.

Остановимся вкратце на некоторых результатах определения нижней критической нагрузки другими методами. С. А. Алексеев использовал метод последовательных приближений. Им получена формула

$$k_{сн} = 3,87 \sqrt{h/R}. \quad (6.2)$$

Этот результат интересен тем, что величина $k_{сн}$, в отличие от упомянутых выше результатов, зависит от относительной

толщины оболочки, что качественно соответствует экспериментам. Кирсте [5.1] из геометрических соображений получил $k_{\text{сн}} = 0,308$, А. В. Погорелов [4.10] получил $k_{\text{сн}} = 0,296$, А. В. Саченков [6.20] методом Власова получил $k_{\text{сн}} = 0,352$.

§ 7. Учет начальных несовершенств

Впервые влияние начальных несовершенств формы оболочки обсуждалось в работе Флюгге [5.4] (1932), в которой даны объяснение физической сущности явления и постановка линейной задачи. В линейные уравнения устойчивости были введены добавочные члены, характеризующие изменение кривизны за счет начального прогиба.

В 1934 г. Доннелл [7.23] учел начальные неправильности, введя их в нелинейные уравнения. Однако первое решение Доннелла было недостаточно точным и не позволило получить положительного результата.

В 1945 г. Койтер [7.36] подробно исследовал поведение различных упругих систем вблизи точки бифуркации. Для простейшей осесимметричной формы начального прогиба с длиной волны, равной длине волны при потере устойчивости совершенной оболочки, была получена зависимость для критических напряжений (см. также [7.37])

$$2(1 - k_c)^2 - 3\sqrt{3(1 - \nu^2)}a_0k_c = 0. \quad (7.1)$$

Согласно этой зависимости даже небольшая осесимметричная неправильность приводит к значительному снижению критического усилия. В 1950 г. Доннелл и Ван [7.24], развивая дальше предложенную в 1934 г. Доннеллом постановку, сформулировали окончательно метод учета несовершенств оболочки, который впоследствии широко применялся. Согласно этому методу все начальные несовершенства (геометрические, физические и пр.) учитываются введением некоторого эквивалентного начального прогиба w_0 , подобного прогибу потери устойчивости w .

Величина амплитуды a_0h прогиба w_0 связывается с геометрическими свойствами оболочки и способом ее изготовления

$$a_0 = \frac{u_0}{\pi^2} l_1^{1,5} l_2^{0,5} \frac{1}{n^2} = \frac{u_0 R^2}{m^{1,5} n^2 h^2}, \quad (7.2)$$

где u_0 — коэффициент несовершенства, определяемый в основном способом изготовления оболочки. Примерная величина этого коэффициента 0,001—0,0002. Величины l_1 , l_2 или m , n обычно берутся из линейных решений.

Доннелл и Ван получили решение, используя функцию прогиба (6.1) с четырьмя членами. Для различных значений коэффициента несовершенства $u_0 R/h = 0,001 \div 0,4$ были построены

кривые «напряжение — деформация», указывающие на существенное снижение критической нагрузки даже при очень малых прогибах. При $u_0 = 0,00015$ дано сравнение с экспериментом. Расчетные данные получились несколько выше экспериментальных.

В решении [9.9] взято несколько отличное от принятого Доннеллом выражение коэффициента несовершенства

$$a_0 = \frac{V}{2} = u_0 \left[\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \frac{1}{n} \right]^\delta. \quad (7.3)$$

При $\delta = 2$, $u_0 = 0,5 \cdot 10^{-4}$, $l_1/l_2 = 1$, $l_2 = (\pi R/0,908)/(R/h)^{1/2}$ (соответствует классическому решению) получена формула

$$k_c = 1 - 0,0347 (R/h)^{0,4} = 1 - 1,17 a_0^{0,4}. \quad (7.4)$$

В решении Собея [7.51] (1966) использовалась функция прогиба (6.1) с двадцатью шестью членами. При различных значениях амплитуд $a_0 h$ начального прогиба построены кривые «напряжение — деформация», содержащие устойчивые ветви исходного и части ветвей закритического состояний. Качественно кривые похожи на кривые Доннелла — Вана. Отмечается, что при $a_0 > 0,25$ явление хлопка практически исключается. В этом случае за критическое значение нагрузки можно принимать ее наибольшую величину. Для относительного верхнего критического напряжения в зависимости от величины a_0 получены значения:

a_0	0,125	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4	5
k_c	0,33	0,29	0,254	0,230	0,210	0,180	0,156	0,124	0,103	0,087

В методе, предложенном Доннеллом, при варьировании энергии по параметрам одновременно с формой потери устойчивости изменяется и норма начального прогиба. Это является одним из основных недостатков метода. В некоторых работах сделана попытка освободиться от этого недостатка.

Мадсен и Хофф [7.29, 7.41] (1965) исследовали влияние начального прогиба (6.1), удерживая в ряде члены, содержащие a_{11}^0 и a_{20}^0 . Функция прогиба бралась также в виде (6.1) с удержанием трех членов a_{11} , a_{20} , a_{02} . При этом считалось, что a_{11}^0 и a_{20}^0 не пропорциональны a_{11} , a_{20} . Энергия варьировалась только по параметрам a_{11} , a_{20} , a_{02} дополнительного прогиба. Результат решения для случая $a_{20}^0 = a_{11}^0/4$ дан диаграммой, подобной полученной Доннеллом и Ваном.

В большинстве упомянутых выше работ для определения верхней критической нагрузки несовершенной оболочки использовались нелинейные уравнения. Этой же цели можно достичь, используя уравнения устойчивости. В этом случае задача заключается в исследовании устойчивости моментных форм равновесия. При этом исходное моментное состояние определяется нелинейными уравнениями. Первыми из работ этого направления были упомянутые выше работы Флюгге [5.4], Койтера [7.36]. В работах Бабкока и Зехлера [7.19] (1962) исследовалось влияние осесимметричной начальной неправильности двух форм:

$$\omega_0 = a_0 h \sin(\pi x/L), \quad \omega_0 = 4a_0 h (x/L)(1 - x/L). \quad (7.5)$$

При прогибах внутрь нагрузка снижалась с ростом величины a_0 . При прогибах наружу (бочкообразность) критическая нагрузка равнялась классической. Форма начального прогиба (7.5) имеет одну полуволну по длине. При этом в оболочке в исходном состоянии возникают окружные усилия, которые оказывают значительное влияние на устойчивость оболочки. Это влияние объясняется тем, что критическое окружное усилие по отношению к h/R является величиной более высокого порядка малости, чем критическое осевое усилие. В первом приближении влияние окружного усилия можно учесть, рассмотрев комбинированный случай нагружения оболочки постоянным окружным усилием и осевыми усилиями так, как это делал Х. М. Муштари при учете краевого эффекта [2.7].

С. Н. Кан [7.5] использовал этот подход и в случае регулярного осесимметричного прогиба

$$\omega_0 = a_0 h \sin \lambda_0 \xi, \quad \lambda_0 = m_0 \pi R/L, \quad m_0 = \chi, \quad (7.6)$$

где m_0 равно числу полуволи осесимметричной потери устойчивости идеальной оболочки. Д. Е. Липовский [7.9] распространил этот подход на случай оболочки с локальным осесимметричным прогибом в виде одной полуволны регулярного прогиба (7.6). Влияние регулярного прогиба (7.6) было снова рассмотрено Койтером [7.37] (1963), где получена зависимость

$$2(1 - k_c)^2 - \sqrt{3(1 - \nu^2)} a_0 (2 + k_c) = 0. \quad (7.7)$$

Эта зависимость, как показали расчеты с минимизацией по n , справедлива при $a_0 < 0,579$. Величина k_c снижалась от 1 до 0,2 при изменении a_0 от 0 до 1. Результаты по (7.1) и (7.7) в диапазоне $a_0 = 0 \div 1$ отличаются незначительно.

В работе Хоффа [7.30] формула (7.1) представлена в виде

$$k_c = 1 + \frac{1}{2}C - C^{1/2}(1 + \frac{1}{4}C)^{1/2} \quad (C = 2,48a_0). \quad (7.8)$$

При условии $C \ll 4$ получено

$$k_c = 1 - C^{1/2} + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^{3/2} + \dots \quad (7.9)$$

Величину a_0 в первом приближении можно [7.41] принять пропорциональной R/h , представив C в виде $C = 2,48 k^* (R/h)$. Рекомендовано брать $k^* = 10^{-4}$ для оболочек обычных и $k^* = 4 \cdot 10^{-4}$ для совершенных оболочек. При $C = 10^{-3} (R/h)$ согласно (7.9) получается $k_c = 0,64; 0,47; 0,38; 0,21$ соответственно для $R/h = 200, 600, 1000, 3000$.

В работе [7.37] рассматривалось также и влияние неосесимметричного начального прогиба

$$w_0 = a_0 h \cos \lambda \xi \cos n\varphi, \quad (7.10)$$

где λ и n удовлетворяют уравнению (7.14). Показано, что этот прогиб приводит к такому же снижению критического усилия, как и осесимметричный прогиб, если его амплитуда в $\sqrt{2} \lambda_0/\lambda$ раз больше амплитуды осесимметричного прогиба. Уравнение, подобное (7.1), имеет вид

$$2\sqrt{2}(\lambda_0/\lambda)(1 - k_c)^2 - 3\sqrt{3}(1 - \nu^2)k_c a_0 = 0. \quad (7.11)$$

В решении Койтера длина полуволны по образующей при потере устойчивости была принята вдвое больше длины полуволны начальной неправильности. Это ограничение было снято в работе Альмрота [7.15], в которой длина полуволны варьировалась. Критическое усилие при этом снизилось, но незначительно. Дальнейшее уточнение решения получено в работе Хоффа и Дима [7.25]. Решение нелинейных уравнений в этой работе получено методом разложения по малому параметру, за который принято отношение амплитуды неправильности к толщине. Сравнение решений Койтера (кривая a), Альмрота (b), Хоффа и Дима (d) показано на рис. 7.14. На этом же рисунке показана пунктирная кривая для случая неосесимметричного начального прогиба (7.10), в котором λ и n варьировались. Кривой c показан результат для случая начального прогиба

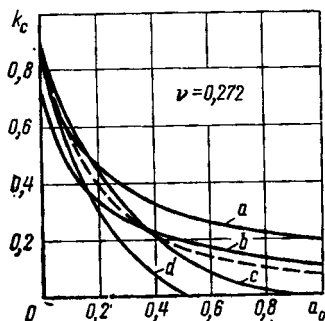


Рис. 7.14. Относительные критические усилия сжатия оболочки с начальным осесимметричным регулярным прогибом.

нейных уравнений в этой работе получено методом разложения по малому параметру, за который принято отношение амплитуды неправильности к толщине. Сравнение решений Койтера (кривая a), Альмрота (b), Хоффа и Дима (d) показано на рис. 7.14. На этом же рисунке показана пунктирная кривая для случая неосесимметричного начального прогиба (7.10), в котором λ и n варьировались. Кривой c показан результат для случая начального прогиба

$$w_0 = a_0 h (\cos \lambda \xi \cos n\varphi + 0,25 \cos 2\lambda \xi), \quad (7.12)$$

имеющего осесимметричную и неосесимметричную компоненты.

В работе Нарасимхана и Хоффа [7.45] исследовалось влияние начального прогиба, соответствующего прогибу потери устойчивости совершенной оболочки при граничных условиях S1. В расчетах было показано, что оболочка при граничных условиях S1 менее чувствительна к несовершенствам, чем при классических условиях. Зависимость величины k_c от a_0 имеет вид (знаменатель — условия S3 согласно [7.42], числитель — условия S1, $L/R = 0,63$)

$a_0 = 0,1$	0,4	0,6	0,8	1
$k_c = \frac{0,52}{0,5}$	$\frac{0,38}{0,22}$	$\frac{0,34}{0,18}$	$\frac{0,32}{0,15}$	$\frac{0,3}{0,14}$

В работе [7.31] приводятся результаты Хатчинсона, который исследовал устойчивость защемленной по краям оболочки. Наружная поверхность оболочки была гладкой, а внутренняя поверхность имела косинусоидальную образующую, так что оболочка имела переменную толщину

$$h = h_c \left(1 + \frac{\delta}{h_c} \cos \frac{\pi x}{L} \right), \quad (7.13)$$

где h_c — средняя толщина, δ — амплитуда отклонения. Уравнение образующей срединной поверхности оболочки при этом имеет вид

$$w_0 = - \frac{\delta}{2} \cos \frac{\pi x}{L}. \quad (7.14)$$

Уравнения исходного состояния и уравнения устойчивости после

разделения переменных решались численно методом конечных разностей. Результаты расчетов совпали с результатами Койтера с точностью порядка 5%. На рис. 7.15 показано сравнение решения Койтера (сплошная линия) и Хатчинсона (пунктир) для различных значений параметра $k = m/2\chi$. Следовательно, как и предполагалось ранее, наиболее опасная неправильность соответствует осесимметричной неправильности по форме потери устойчивости совершенной оболочки ($k = 0,5$).

Таким образом, начальные прогибы, соответствующие основным формам потери устойчивости оболочки, приводят к значительному снижению критических усилий. Однако такие начальные прогибы в некоторой степени абстракция, поскольку реальные неправильности, как правило, носят нерегулярный характер.

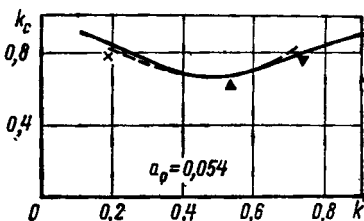


Рис. 7.15. Зависимость относительного критического усилия от параметра числа волн.

Поэтому более значительный интерес имеют исследования влияния нерегулярных начальных прогибов. В работах [7.10, 7.31] исследовалось влияние локальных осесимметричных прогибов.

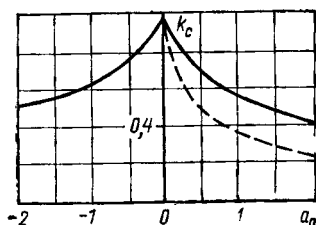


Рис. 7.16. Начальный прогиб и относительное критическое усилие сжатия оболочки

Ю. В. Липовцев и В. К. Кузнецов [7.10] исследовали влияние локального прогиба. Решение задачи устойчивости моментного равновесного состояния получено методом конечных разностей. Результаты вычислений на ЭВМ показаны на рис. 7.16 сплошной линией, пунктирной линией показан результат расчета для случая периодического начального прогиба.

Влияние осесимметричных локальных вмятин исследовалось также в работе Теннисона, Мюгериджи и Хатчинсона [7.31]. Влияние произвольно распределенных по длине осесимметричных неправильностей рассматривалось в работе Амазиго [7.16].

Осимметричных неправильностей рассматривалось в работе Амазиго [7.16].

§ 8. Эксперименты

Как уже упоминалось, первые эксперименты [7.38, 7.42] предшествовали теоретическим разработкам проблемы и носили в основном качественный характер. Впоследствии был поставлен еще ряд экспериментов. Результаты их приведены на рис. 7.17. Большинство экспериментов, представленных на этом рисунке, уже описано в литературе и широко известно (см. [5.1]). Остановимся подробнее на наиболее интересных экспериментах, появившихся в последние годы. Характерным для всех экспериментов является более или менее аккуратная постановка, качественное изготовление образцов и, как следствие этого, высокие критические напряжения.

В первую очередь отметим эксперименты, в которых изучалась качественная сторона явления потери устойчивости и закритическое поведение оболочек.

На рис. 7.18 показаны кадры кинофильма потери устойчивости оболочки, полученный скоростной съемкой в работе [7.14]. Выпучивание развивается постепенно, начинаясь, вероятно, с места максимальной неправильности или какого-то дефекта.

Постепенно выпучивание меняется и в конце приобретает хорошо известную ромбовидную форму. Она обычно и наблюдается в большинстве экспериментов. Аналогичные кинофильмы были получены и в работах [6.27, 7.34, 7.52].

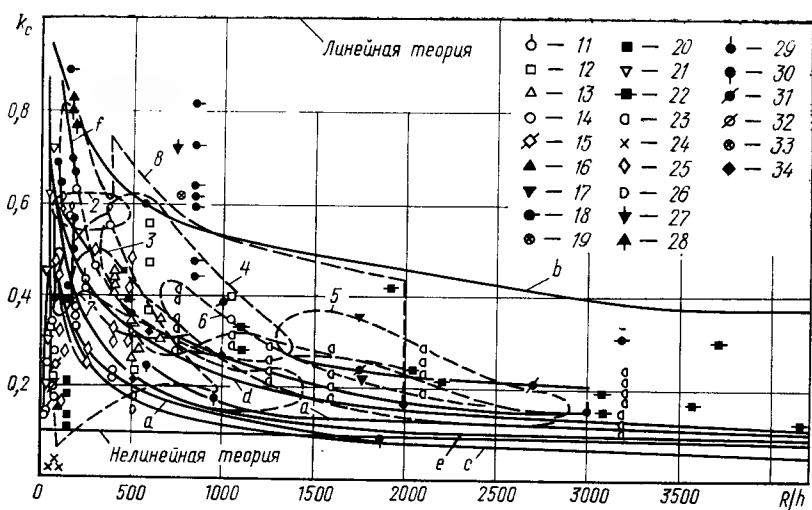


Рис. 7.17 Экспериментальные значения относительных критических усилий сжатия оболочки и эмпирические кривые

1—Flügge W. [5.4], 2—Robertson A. [5.1], 3—Bridget F. J. и др. [11.19], 4—Lundquist E. E. [5.1], 5 и 6—GALCIT [5.1], 7—Donnell L. H. [7.23], 8—Wilson W. M. [5.1], 9—Божинский А. Н., Вольмир А. С. [26.1], 10—Weingarten V. I. и др. [7.58], 11—Karman D. K. [5.1], 12—Fitzgibbon D. P. [5.1], 13—Goree W. S., Nash W. A. [5.1], 14—Агамиров Р. А., 15—Gerard G. [5.1], 16—Burns A. B., Crawford R. E. [5.1], 17—Thielemann W. [7.56], 18—Almroth B. O. и др. [7.14], 19—Исправинов Л. П., 20—Геммерлинг А. В. [7.3], 21—Moore R. L., Clark J. W. [5.1], 22—Ballerstedt W., Wagner H. [11.17], 23—Kanemitsu S., Nojima N. M. [7.34], 24—Alexander J. M. [5.1], 25—Буштырков А. А., Родителей К. А., 26—Зубчанинов В. Г. [5.1], 27—Babcock C. D., Sechler E. E. [7.19], 28—Peterson J. P., Dow M. B. [5.1], 29—Batdorf S. B. и др. [5.1], 30—Fung Y. C., Sechler E. E. [10.8], 31—Harris L. A. и др. [5.1], 32—Pugsley A. [5.1], 33—Fischer G. [10.6], 34—Lo H., Crate H. S., Schwartz E. B. [10.12].

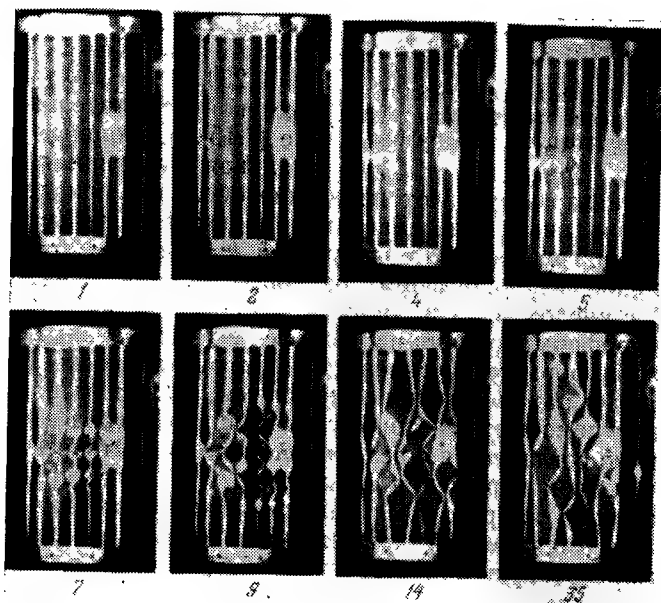


Рис. 7.18 Кадры скоростной съемки процесса потери устойчивости оболочки. Числами обозначены номера кадров.

1. Обоснование нижней критической нагрузки

Эксперименты Тилеманна и Эсслингер [7.56, 7.57] посвящены изучению закритического поведения оболочки и обоснованию величины нижней критической нагрузки. Испытывались оболочки из листового полиэфирного майлара ($E = 55\,000 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_p = 420 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0,3$) с параметрами: $L = 11 \div 77 \text{ см}$, $R = 5 \div 20 \text{ см}$, $h = 0,02 \div 0,025 \text{ см}$, $R/h = 228 \div 787$, $l =$

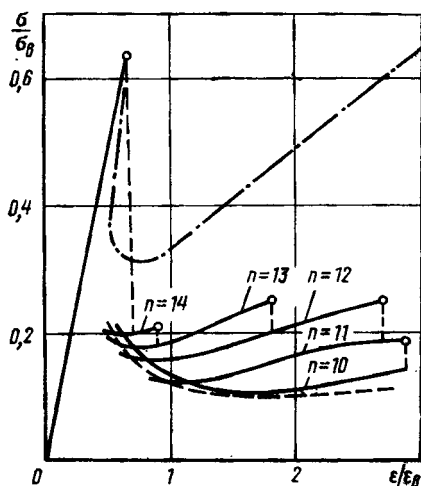


Рис. 7.19. Зависимость относительного напряжения сжатия от относительной продольной деформации.

$= 2,23$ $\chi = 36 \div 258$. Граничные условия соответствовали заземлению ($u = v = w = w_x = 0$). Испытано 11 оболочек. В процессе эксперимента задавалось укорочение оболочки, регистрировалась нагрузка, укорочение и прогибы. Хорошие упругие свойства майлара позволили провести эксперимент при упругих деформациях. Результаты эксперимента даны на рис. 7.19, 7.20.

На рис. 7.19 показана диаграмма деформирования оболочки средней длины ($l = 72$, $L = 40 \text{ см}$, $R = 20 \text{ см}$, $h = 0,254 \text{ мм}$), полученная на жесткой испытательной машине [7.15]. Сплошные и вертикальная пунктирная линии на

диаграмме характеризуют поведение оболочки при деформировании. Начальная часть диаграммы линейная. При верхней критической нагрузке, соответствующей $k_c = \sigma/\sigma_p = 0,63$, произошел хлопок, исходная форма равновесия сменилась выпученной формой с числом волн по окружности $n = 14$. В процессе дальнейшего деформирования наблюдался скачкообразный обмен несмежными формами равновесия. Нагрузка, соответствующая выхлопу для каждой равновесной формы, последовательно уменьшалась, стремясь к некоторому пределу. Величина этого предела отлично согласуется с величиной нижней критической нагрузки, полученной в решении Альброта [7.13] (пунктир).

Как видно из рис. 7.19, закритическое состояние оболочки характеризуется серией кривых равновесных состояний, образующих некоторую область шириной примерно в 20% от величины верхней критической нагрузки. Верхнюю границу области дают точки смены форм равновесия при нагружении,

нижнюю — точки смены форм равновесия при разгрузении. Для характеристики закритического поведения оболочки можно принять какую-либо кривую, проходящую через указанную область.

Для практической оценки устойчивости оболочек в работе [7.57] рекомендуется брать минимальную величину нагрузки на кривой первого закритического равновесия состояния — первую нижнюю критическую нагрузку. В эксперименте эта нагрузка соответствовала форме выпучивания с одним рядом выпучин по длине. Другой характеристикой может служить минимальная нагрузка первого несмежного равновесного состояния с двумя рядами выпучин. Обе указанные характеристики

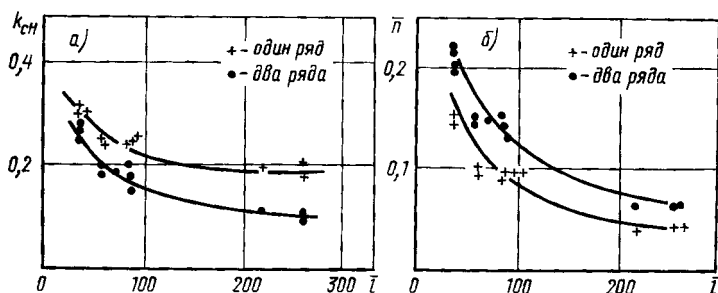


Рис. 7.20. Зависимость относительной величины первого нижнего критического напряжения и параметра волнообразования от параметра $\bar{l}$.

нечувствительны к начальным неправильностям и могут служить надежной оценкой устойчивости оболочки. Графики характеристик, полученные в эксперименте, показаны на рис. 7.20. Из этих рисунков видно, что критическая нагрузка $k_{сн}$ уменьшается с увеличением L/R или R/h , что находится в соответствии с экспериментом. Величина $k_{сн}$ изменяется от 0,2 для длинных тонких оболочек до 0,35 для толстых коротких оболочек.

Таким образом, эксперименты Тилеманна и Эсслингер отчасти подтвердили правильность решений нелинейных задач и тот факт, что нижняя критическая нагрузка, если ее понимать как абсолютный минимум из нижних нагрузок несмежных состояний, не может быть принята в качестве оценки устойчивости оболочек.

2. Обоснование верхней критической нагрузки

Сравнение экспериментальных величин критических напряжений, полученных разными авторами, с расчетными показано на рис. 7.17. Критические напряжения в экспериментах обычно

соответствуют максимальной нагрузке, воспринимаемой оболочкой в момент потери устойчивости. Характерным является закономерное падение коэффициента k_c с увеличением R/h и большой разброс величин k_c . Экспериментальные значения напряжений составляют 10—90% от верхнего критического напряжения σ_v . Отметим прежде всего эксперименты, в которых были получены критические нагрузки, близкие к верхним.

В эксперименте Теннисона [7.52, 7.53] испытывались оболочки из фотоупругой пластмассы, изготовленные центробежным литьем. Образцы имели хорошие упругие свойства, что позволяло производить многократные испытания на одном и том же образце. Размеры образцов были такие: $R = 10,55$ см, $h = 0,0686$ см, $L = 41,9$ см, $L/R = 4$, $R/h = 160$. Разностенность не превышала 6%, испытания проводились на жесткой испытательной машине. Величина критической нагрузки соответствовала $k_c = 0,90$. Форма потери устойчивости, полученная фотоупругим способом, в первоначальной стадии выпучивания близко соответствовала форме, предсказанной линейной теорией. При увеличении нагрузки эта форма переходила в характерную для больших прогибов ромбовидную форму. Основной вывод — в хорошо поставленном эксперименте должна реализоваться верхняя критическая нагрузка. Таким образом, этот эксперимент отчасти подтвердил правильность линейной теории как по форме потери устойчивости, так и по величине критической нагрузки.

В эксперименте Теннисона использовались оболочки с относительно малой величиной $R/h = 160$. Такие оболочки менее, в сравнении с тонкими оболочками, чувствительны к начальным неправильностям, и высокие значения критических усилий для них характерны (рис. 7.17). Близкие к указанному результату значения k_c были получены в работе Вейнгартена, Моргана и Сейда [7.58]. Бабкоком и Зехлером [7.19], Альмротом, Брашем и Холмсом [7.14] и А. В. Погореловым [4.10] получены высокие значения критических нагрузок и для тонких оболочек. В работе [7.19] испытывались оболочки с $R/h = 850$, полученные электролитическим осаждением меди на полированный сердечник, и было получено $k_c = 0,72$.

В эксперименте [7.14] оболочки изготовлялись электролитическим осаждением никеля на алюминиевый сердечник с последующей шлифовкой. Образцы имели размеры $h = 0,09$ мм, $L = 25 \div 15$ см, $R = 7,6$ см. Все образцы были разделены на четыре группы: плохие, средние, хорошие и отличные. Величина k_c для этих образцов для средних значений h и E составляла соответственно 0,43—0,44; 0,45—0,58; 0,6—0,69; 0,73. Величина нижнего критического напряжения для всех четырех групп составляла примерно 8,4—11,5% от σ_v .

В экспериментах А. В. Погорелова [4.10] испытывались оболочки, полученные напылением меди в вакууме на геометрически совершенный полированный сердечник. Величина модуля была принята равной среднему значению $0,9 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, полученному на медных образцах, изготовленных напылением в вакууме в сходных условиях. Оболочки имели размеры $R = 4 \text{ см}$, $L = 8 \text{ см}$, $h = 0,03 \div 0,09 \text{ мм}$. Испытания проводились на специальной установке. Особое внимание уделялось равномерности распределения усилий по окружности. Замерялись верхняя и нижняя критические нагрузки, соответствующие максимальной величине воспринимаемой оболочкой силы в процессе деформирования. Было получено $k_c = 0,93 \div 1,04$. Величина нижней критической нагрузки соответствовала $k_{сн} = 0,25 \div 0,29$. В эксперименте величина нижней критической нагрузки была стабильной и не менялась при повторных испытаниях оболочки. Верхняя же критическая нагрузка не была стабильной. Указанные величины k_c удалось получить после тщательной отладки и доводки установки.

В эксперименте Вейнгартена и Моргана [7.58] (область 10) испытывались стальные и майларовые оболочки в широком диапазоне изменения параметров. При величине критических напряжений, больших $0,7 \sigma_s$, обычно наблюдались более низкие значения k_c . Этот эффект следует отнести за счет влияния граничных условий, так как при таком уровне напряжений у краев оболочки появляется текучесть материала.

Экспериментальная проверка решения Койтера содержится в работе Теннисона и Мюгериджи [7.54], которые испытали несколько оболочек из фотоупругой пластмассы, изменения толщины стенки которых описывались зависимостью (7.13). Сравнение с решением Койтера и Хатчинсона показано на рис. 7.15. Расхождение расчетов с экспериментом не превышает 10%. Эксперименты с оболочками, имеющими локальные осесимметричные вмятины, проводили Хатчинсон, Теннисон и Мюгериджи [7.31]. Эти эксперименты, выполненные на моделях оболочек из фотоупругой пластмассы, хорошо согласуются с решением авторов. В эксперименте [7.9] испытывались несовершенные оболочки из латуни, нержавеющей стали Я1Т и магниевого сплава АМГ-6М. Оболочки перед испытаниями обмерялись. Замеренная картина начальных прогибов подвергалась гармоническому анализу с целью выделения осесимметричной составляющей, которая вводилась в расчет. Таким образом удавалось достичь удовлетворительного соответствия расчета и эксперимента. Экспериментальная проверка решения Амазиго [7.16] содержится в работе Теннисона, Мюгериджи, Касвела [7.55]. В этой работе испытывались оболочки из эпоксидной смолы, имеющие три

типа начальных несовершенств: регулярная синусообразная неправильность, неправильность с изменяющейся по длине оболочки полуволной и произвольно распределенная по длине неправильность.

Теоретико-экспериментальное исследование влияния реальных начальных прогибов содержится в работе Арбока и Бабкока [7.17], которые испытали несколько тщательно изготовленных электролитическим способом оболочек. Измерение начальных прогибов в исходном состоянии и после потери устойчивости производилось бесконтактным способом. Полученная картина прогибов подвергалась гармоническому анализу. Наблюдения позволили сделать авторам следующие выводы.

1. Преобладают компоненты начального прогиба с малым числом волн по окружности и длине.

2. С ростом нагрузки быстро растут компоненты начального прогиба с одной полуволной по длине и короткими волнами по окружности. Число волн по окружности этих доминирующих компонент охраняется и после потери устойчивости. Однако длина продольных полуволн получается значительно меньше в закритической стадии.

3. Существуют не одна, а несколько «критических» гармоник, обуславливающих потерю устойчивости. Некоторые из них могут быть малыми и не доминировать в начальном прогибе.

В результате гармонического анализа авторы выделяли две «критические» гармоники: осесимметричную с одной волной по длине и неосесимметричную с одной полуволной по длине — и использовали их в решении нелинейных уравнений Доннелла, полученном методом Бубнова. Дополнительный прогиб задавался подобным начальному прогибу. В результате удалось достичь хорошего соответствия расчетных и экспериментальных значений критических усилий, которые приводятся ниже:

k_{cs}	k_{cp}	Критические гармоники	
0,658	0,651	C_{02}	B_{91}
0,736	0,827	C_{02}	C_{91}
0,673	0,764	A_{02}	B_{91}

Здесь A_{ij} , C_{ij} , B_{ij} — коэффициенты в ряде разложения начального прогиба ($\lambda = m\pi/L$)

$$\begin{aligned} \omega_0 = \sum_{mn} (A_{nm} \cos \lambda \xi \cos n\varphi + B_{nm} \cos \lambda \xi \sin n\varphi + \\ + C_{nm} \sin \lambda \xi \cos n\varphi + D_{nm} \sin \lambda \xi \sin n\varphi). \end{aligned}$$

В расчетах критической нагрузке соответствовала предельная точка.

§ 9. Эмпирические зависимости

На рис. 7.17 приведены теоретические и полуэмпирические кривые по данным разных работ. Кривая b дает верхнюю границу для большинства экспериментальных значений k_c

$$k_c = 0,5 - 3,5 \cdot 10^{-3} (R/h)^{1/2} + 4,6 (h/R)^{1/2}. \quad (9.1)$$

Кривая f Канемитцу и Ноимы [7.34]

$$k_c = 14,9 (h/R)^{0,6} \quad (9.2)$$

дает хорошую нижнюю границу для значений k_c , полученных в экспериментах с тщательно изготовленными образцами в диапазоне значений $R/h > 500$; $0,5 < L/R < 5$.

Лучшую границу для диапазона значений $0,03 < L/R < 5$ дает [7.58] (кривая d)

$$k_c = 1 - 0,9 \left(1 - e^{-\frac{1}{16} \sqrt{R/h}} \right). \quad (9.3)$$

Кривая e построена по формуле [11.23]

$$k_c = 6,35 (h/R)^{0,54}. \quad (9.4)$$

Кривая c соответствует формуле (6.2) С. А. Алексеева. Она дает нижнюю границу всех экспериментальных точек, за исключением точек в нижнем левом углу, полученных на оболочках с низким значением R/h и на натуральных оболочках. Однако для больших значений R/h эта кривая дает заниженные значения k_c . Лучшее представление дает кривая a

$$k_c = 3,87 (h/R)^{1/2} + 10^{-3} (R/h)^{1/2}. \quad (9.5)$$

Эта кривая получена В. В. Кабановым по формуле (6.2) введением второго поправочного слагаемого.

На рис. 7.17, 7.21 пунктиром приведены еще три полуэмпирические кривые. Верхняя и нижняя кривые получены на основе результатов статистической обработки эксперимента, содержащихся в работе Гарриса и др. [10.9]. Эти кривые соответствуют 90% и 99% вероятности попадания экспериментальных точек в вышележащую от них область. Средняя кривая обычно рекомендуется для хорошо изготовленных оболочек.

В работе [11.16] на основе данных [10.9, 11.23] приведена зависимость

$$k_c = 1,73 \left[0,235 \cdot 10^{-7} \left(\frac{R}{h} \right)^2 + 0,1755 - 9,2 \cdot 10^{-5} \frac{R}{h} - 1,72 \cdot 10^{-2} \left(\frac{R}{h} \right)^3 \right]. \quad (9.6)$$

Для практических расчетов, вероятно, можно рекомендовать кривую d (формула (9.3)) для совершенных оболочек, не имеющих начальных прогибов; кривую e (формула (9.4)) — для оболочек с незначительными начальными прогибами; кривую a (формула (9.5)) — для оболочек, имеющих начальные прогибы порядка толщины, в качестве нижней границы. Можно использовать также и кривые (рис. 7.20) нижних критических

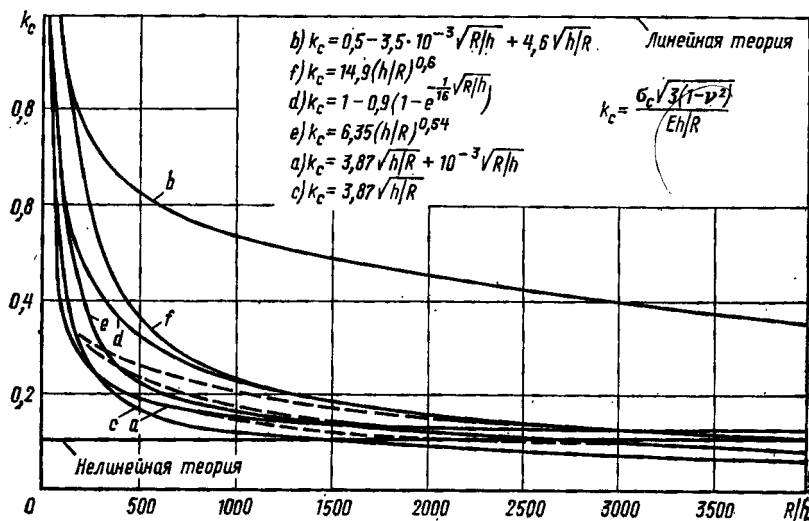


Рис. 7.21. Эмпирические зависимости относительных критических усилий сжатия оболочек средней длины.

нагрузок, полученные в эксперименте Тилеманна и Эсслингер. И, наконец, можно использовать результаты, приведенные в работе [10.11] (рис. 10.4, 10.5, кривая «0»). Эти результаты получены обработкой многочисленных экспериментов. Рис. 10.4 дает зависимость $K = k_c/1,65$ от относительной величины амплитуды неправильности и поперечного давления P . Рис. 10.5 связывает величину неправильности с относительной толщиной оболочки. Сплошная линия A на рис. 10.5 соответствует средним значениям a_0 , область $B - B - 80\%$ вероятности, область $C - C$ включает в себя все возможные отклонения a_0 при заданном R/h .

Все сказанное относилось к оболочкам средней длины. Для коротких оболочек результаты представлены на рис. 7.22 — 7.24. Экспериментальные точки получены в работе [7.58] на тщательно изготовленных майларовых оболочках.

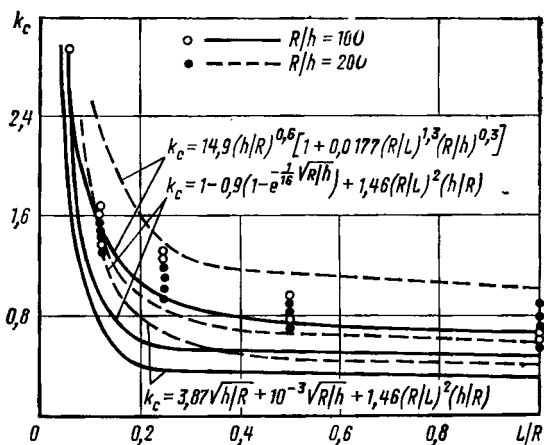


Рис. 7.22. Относительные критические напряжения коротких оболочек.

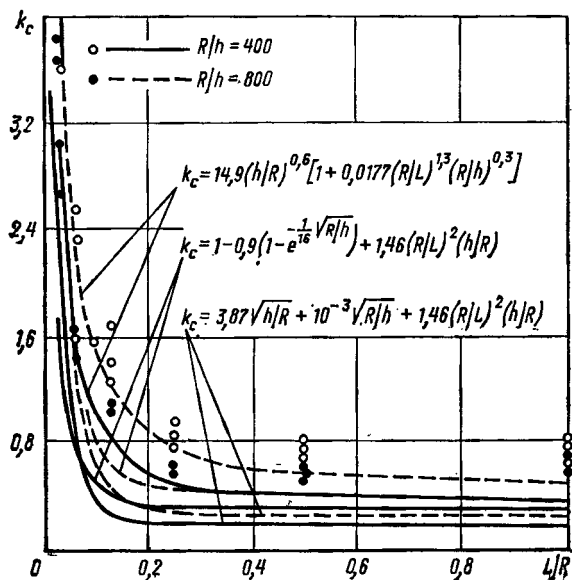


Рис. 7.23. Относительные критические напряжения коротких оболочек.

Оценка Канемитцу и Ноимы

$$k_c = 14,9 \left(\frac{h}{R}\right)^{0,6} \left[1 + 0,0177 \left(\frac{R}{L}\right)^{1,3} \left(\frac{R}{h}\right)^{0,3}\right] \quad (9.7)$$

в некоторых случаях дает завышенные значения. Более подходящая оценка [7.58]

$$k_c = 1 - 0,9 \left(1 - e^{-\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{h}}}\right) + 1,46 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{h}{R}. \quad (9.8)$$

Можно ожидать, по аналогии с рис. 7.21, что для других типов оболочек более надежной окажется оценка

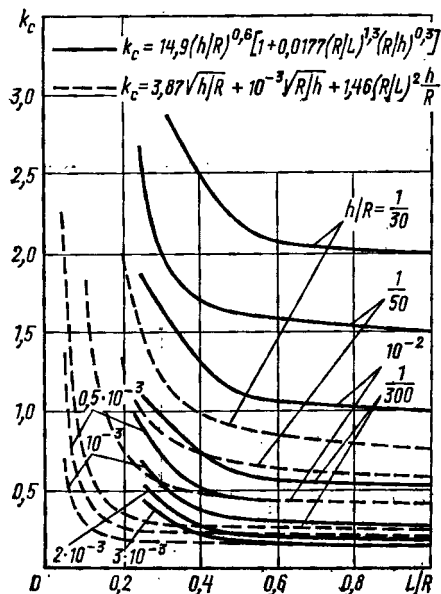


Рис. 7.24. Эмпирические зависимости относительных критических усилий сжатия коротких оболочек.

$$k_c = 3,87 \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2} + 10^{-3} \left(\frac{R}{h}\right)^{1/2} + 1,46 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{h}{R}. \quad (9.9)$$

На рис. 7.24 построены графики по формулам (9.7), (9.8), показывающие влияние длины оболочки. Для сравнительно толстых оболочек это влияние проявляется, примерно, начиная с $L/R = 0,5 \div 0,6$, для тонких оболочек — с $L/R = 0,2 \div 0,3$.

Отметим, что графики рис. 7.21—7.24 носят приближенный характер. Желательно их дальнейшее уточнение. В теории необходимо получить более аккуратные решения с полным учетом

граничных условий, учетом неправильностей произвольной формы, учетом пластичности материала и неоднородности и исходного состояния. В эксперименте необходимы широкие исследования при относительно постоянных условиях с привлечением статистической теории, чтобы учесть влияние большинства параметров. При этом, вероятно, следует дифференцировать эксперименты по целевой направленности. Для проверки теории необходимо исключать большинство влияющих факторов: текучесть краев оболочек, общую пластическую деформацию

цию, неправильности и пр. Для практических же приложений желательно проводить эксперименты на натурных объектах или на моделях, изготовленных по обычным заводским технологиям.

Г л а в а VIII

ВНЕШНЕЕ ДАВЛЕНИЕ

В этой главе рассмотрим решения задач устойчивости оболочек при внешнем боковом и гидростатическом давлениях (рис. 8.1). Для оболочек средней длины критические давления

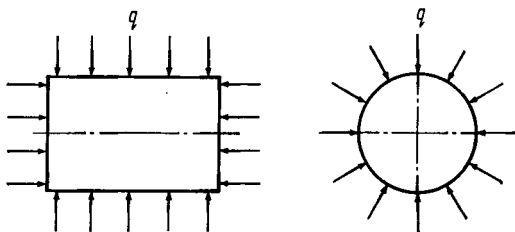


Рис. 8.1. Круговая цилиндрическая оболочка при всестороннем давлении.

для обоих случаев нагружения отличаются незначительно, поэтому в дальнейшем эти случаи в большинстве задач разграничиваться не будут.

Первые экспериментальные исследования устойчивости оболочек при внешнем давлении были проведены в 1858 г. Фёйер-бёрном [8.21]. Первые теоретические решения независимо получили в 1859 г. Бресс [8.16] и Грасгоф [8.22] для бесконечно длинной оболочки без учета влияния коэффициента Пуассона. Брайан [6.25] (1888) энергетическим методом получил формулу для критического давления

$$q = q_0 = \frac{Eh^3}{4(1-\nu^2)R^3}, \quad (1.1)$$

которую обычно называют формулой Грасгофа — Бресса.

Основные результаты для оболочек конечной длины в классической постановке были получены Саутуэллом [8.29] (1913), Мизесом [8.25] (1914), П. Ф. Папковичем [8.13] (1929).

§ 1. Линейная задача. Классическая постановка

В классической постановке исходное состояние оболочки определяется безмоментными усилиями:

$$T_2^0 = -qR, \quad T_1^0 = -\frac{1}{2}qR, \quad (1.2)$$

а граничные усилия соответствуют свободному опиранию. В случае бокового внешнего давления $T_1^0 = 0$.

1. Оболочки средней длины. Из характеристического уравнения (1.4) гл. VI в этом случае имеем ($T_1^0 = S^0 = 0$)

$$\frac{qR}{Eh} = \frac{\lambda^2}{n^2} \left[\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{h}{12(1 - \nu^2)R^2} \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda} \right]. \quad (1.3)$$

Введя обозначения:

$$q_2 = \frac{qR}{T_B}, \quad \chi = \frac{1}{\lambda} \sqrt[4]{\frac{1 - \nu^2}{\alpha_1}} = \sqrt[4]{12(1 - \nu^2)} \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{R}{h}},$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2} \right), \quad z_1 = \mu \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{2}{\chi}, \quad \alpha_1 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad (1.4)$$

получим

$$q_2 = \frac{\alpha_2}{2} \frac{z_1^2 + z_1^{-2}}{2z_1 - \alpha_2}. \quad (1.5)$$

Запишем производную q_2 по α_2

$$\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2} = \frac{z_1}{(2z_1 - \alpha_2)^2} \left(z_1^2 + \frac{1}{z_1^2} \right). \quad (1.6)$$

Эта производная больше нуля, следовательно, функция $q_2(\alpha_2)$ — монотонно возрастающая. Она имеет наименьшее значение при

$$\lambda = \lambda_1 = \pi R/L. \quad (1.7)$$

Приравнявая нулю производную q_2 по z_1 , получаем уравнение

$$(\alpha_2 \mu)^4 = 3 + 2/(\mu - 1), \quad (1.8)$$

из которого определяется μ как функция от χ , а, следовательно, z_1 и q_2 . При $\mu \gg 1$ можно получить формулу для q_2 . Опуская в (1.8) второе слагаемое в правой части, находим

$$z_1 = \sqrt[4]{3} = \mu \alpha_2. \quad (1.9)$$

Следовательно,

$$q_2 = \frac{\sqrt[4]{3} + 1}{2\sqrt[4]{3}(\chi\sqrt[4]{3} - 1)} = \frac{0,877}{\chi - 1/\sqrt[4]{3}}. \quad (1.10)$$

Количество волн по окружности определяется согласно (1.4)

$$n^2 = \frac{1}{\omega} \left(\sqrt[4]{3} - \frac{1}{\chi} \right). \quad (1.11)$$

При $\chi \gg 1/\sqrt[4]{3}$ отсюда следует так называемая формула Саутуэлла — Папковича

$$q_2 = 0,877/\chi, \quad (1.12)$$

которую обычно записывают в виде

$$q = 0,856 \frac{E}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}. \quad (1.13)$$

Количество волн по окружности определяется выражением

$$n^2 = \sqrt[4]{3/\omega}. \quad (1.14)$$

2. Длинные оболочки. Из характеристического уравнения (1.5) гл. VI в этом случае имеем

$$q_3 = \frac{1}{\omega_m^2 n^2} \left[\omega_m^2 (n^2 - 1) n^2 + \frac{1}{\omega_m^2 n^2 (n^2 - 1)} \right], \quad (1.15)$$

где

$$q_3 = 3 \frac{q}{q_0}, \quad q_0 = 3 \frac{D}{R^3}, \quad \omega_m = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_1}{1 - \nu^2}}, \quad \alpha_1 = \frac{h^2}{12R^2}. \quad (1.16)$$

Для бесконечно длинных оболочек из (1.15) при $n = 2$ следует формула Грасгофа — Бресса (1.1). При больших значениях n можно считать $n \gg 1$. В этом случае получаем формулу Саутуэлла

$$q_3 = \frac{1}{\omega_m^2 n^2} \left(\omega_m^2 n^4 + \frac{1}{\omega_m^2 n^4} \right). \quad (1.17)$$

Из условия минимума q_3 по n находим

$$n^2 = \sqrt[4]{3/\omega_m}. \quad (1.18)$$

Следовательно, $m = 1$, $\omega_m = \omega$ и

$$q_3 = 1,754/\omega. \quad (1.19)$$

Эта формула совпадает с формулой Саутуэлла — Папковича (1.12). Зависимость числа волн n в формуле (1.15) от параметра ω можно получить следующим образом. Если в формуле (1.15) вместо n подставить $n - 1$, $n + 1$ и приравнять полученные выражения выражению (1.15), считая $m = 1$, то можно определить значения ω , при которых совершается переход от выпучивания с n волнами к выпучиванию с $n - 1$, $n + 1$ волнами

$$\begin{aligned} \omega_{n-1}^4 &= \frac{n^3 (n^2 - 1) - (n - 1)^4 (n - 2)}{n^4 (n - 1)^4 (n^2 - 1) (2n - 1)}, \\ \omega_{n+1}^4 &= \frac{(n + 1)^4 (n + 2) - n^3 (n^2 - 1)}{n^4 (n + 1)^4 (n + 2) (n^2 - 1) (2n + 1)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Поскольку с уменьшением ω величина n растет, потеря устойчивости с n волнами возможна в интервале

$$\omega_{n-1} \geq \omega \geq \omega_{n+1}. \quad (1.21)$$

Задавая $n = 2, 3, 4, 5$, получим из (1.20), (1.21) значения n для уравнения (1.15) в зависимости от интервала $[\omega_1; \omega_2]$ изменения ω :

$$\begin{aligned} n=2 & [\infty, 0,249], \quad n=3 [0,249; 0,116], \\ n=4 & [0,116; 0,068], \quad n=5 [0,068; 0,045], \\ n=6 & [0,045; 0,032]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

При меньших ω справедлива формула (1.19). Эта формула дает несущественную погрешность и при $n \geq 4$ ($\omega < 0,116$). Подставляя (1.22) в (1.15) и учитывая (1.4), получаем конечные формулы для критического давления оболочки произвольной длины:

$$\begin{aligned} q_2 &= 0,454 \frac{h}{R} \left(1 + \frac{1}{144\omega^4} \right), \quad \omega \geq 0,249, \\ q_2 &= 1,21 \frac{h}{R} \left(1 + \frac{1}{5184\omega^4} \right), \quad 0,249 \geq \omega > 0,116, \\ q_2 &= \frac{0,877}{\chi - 0,44}, \quad \chi \leq 0,37 \frac{R}{h}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Первая формула соответствует волнообразованию с $n = 2$. Для больших значений параметра ω ($\omega \sim 1$) вторым слагаемым в скобке можно пренебречь. Тогда получается формула Грасгофа — Бресса. Вторая формула отвечает волнообразованию с $n = 3$. Третья формула применима при $n > 3$. Для оболочек средней длины, удовлетворяющих неравенствам $\chi > 15$, $\omega < 0,116$, эта формула переходит в формулу Саутуэлла — Папковича. Формулами (1.23) исчерпывается решение задачи устойчивости свободно опертой оболочки.

§ 2. Влияние граничных условий

Исследуем влияние граничных условий, считая исходное состояние оболочки безмоментным. Для этого используем уравнения (2.15) гл. V полубезмоментной оболочки

$$\frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) + \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + q \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0. \quad (2.1)$$

Задавая прогиб в виде

$$w = W \cos n\varphi, \quad (2.2)$$

получаем из (2.1) уравнение в обыкновенных производных

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} - \lambda^4 W = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\lambda^4 = \frac{qR}{Eh} n^4 (n^2 - 1) - n^4 (n^2 - 1)^2 \frac{D}{EhR^2}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) находим выражение для критического давления:

$$q = \lambda^4 \frac{Eh}{R} \frac{1}{n^4 (n^2 - 1)} + (n^2 - 1) \frac{D}{R^3}. \quad (2.5)$$

Величина λ находится как наименьшее собственное число уравнения (2.3) при соответствующих граничных условиях. Число окружных волн подбирается таким, чтобы q приняло наименьшее значение.

В случае $n^2 \gg 1$, что имеет место для оболочек средней длины, его можно определить из условия аналитического минимума $\partial q / \partial n = 0$:

$$n^2 = \lambda \left[36 (1 - \nu^2) \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right]^{1/4}. \quad (2.6)$$

При этом

$$q = \lambda \frac{\sqrt{6} E}{9 (1 - \nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} = \lambda \frac{L}{\pi R} q_b, \quad (2.7)$$

где q_b определяется формулой Саутуэлла — Папковича (1.13). Уравнение (2.3) по форме совпадает с уравнением свободных поперечных колебаний балки. Его общий интеграл можно записать в виде

$$W = C_1 \sin \lambda \xi + C_2 \cos \lambda \xi + C_3 \operatorname{sh} \lambda \xi + C_4 \operatorname{ch} \lambda \xi, \quad (2.8)$$

где $C_1, \dots, C_4$ — произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий. В работе [8.3] показано, что условия

$$v = 0, \quad u = 0, \quad T_1 = 0, \quad S = 0 \quad (2.9)$$

эквивалентны соответственно условиям

$$w = 0, \quad w_{\xi} = 0, \quad w_{\xi\xi} = 0, \quad w_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (2.10)$$

Это соответствие дает возможность удовлетворить все варианты граничных условий, которые получаются из (2.9), (2.10) решением (2.8) с четырьмя произвольными постоянными.

Рассмотрим частные случаи условий на краях оболочки ($\xi = 0, L/R$).

1. Свободное опирание:

$$v = T_1 = 0, \quad W = W_{\xi\xi} = 0.$$

Подчиняя (2.8) этим условиям, находим $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Следовательно, собственная функция имеет вид

$$W = C_1 \sin \lambda \xi. \quad (2.11)$$

Условие $W = 0$ приводит к характеристическому уравнению

$$\sin \lambda \xi_0 = 0, \quad \xi_0 = L/R.$$

ТАБЛИЦА 8.1

N_{π}/π	$x=0$	$x=L$	$\lambda \frac{L}{\pi R}$	q
1	$w = w_{xx} = T_1 = v = 0$		1	q_B
2	$w = w_{xx} = T_1 = S = 0$		1	q_B
3	$w = w_{xx} = u = S = 0$		1,5	$1,5q_B$
4	$w = w_{xx} = u = v = 0$		1,5	$1,5q_B$
5	$w = w_x = T_1 = v = 0$		1	q_B
6	$w = w_x = T_1 = S = 0$		1	q_B
7	$w = w_x = u = S = 0$		1,5	$1,5q_B$
8	$w = w_x = u = v = 0$		1,5	$1,5q_B$
9	$w_{xxx} = w_{xx} = T_1 = S = 0$		0	q_B
10		$w = w_x = u = v = 0$	1,25	$1,25q_B$
11	$w = w_{xx} = T_1 = v = 0$	$w_{xxx} = w_{xx} = T_1 = S = 0$	0	q_B
12		$w_{xxx} = w_x = u = S = 0$	0,5	$0,5q_B$
13	$w = w_x = u = v = 0$	$w_{xxx} = w_{xx} = T_1 = S = 0$	0,595	$0,595q_B$
14	$w = v = 0$	$w = w_{xx} = T_1 = v = 0$	k_q	$k_q q_B$
15	$T_1 = cu$	$w = w_x = u = v = 0$		
16	$w_{xx} = \frac{c}{Eh} w_x$	$w_{xxx} = w_{xx} = T_1 = S = 0$		
17	$w_{xxx} = w_x = u = S = 0$		0,75	$0,75q_B$

Отсюда следует $\lambda = \frac{\pi R}{L}$, а из выражения (2.5) — формула Саутелла (1.17).

2. Жесткое защемление:

$$u = v = 0, \quad W = W_{\xi} = 0.$$

Собственная функция и характеристическое уравнение имеют вид:

$$W = \sin \lambda \xi - \operatorname{sh} \lambda \xi - \alpha (\cos \lambda \xi - \operatorname{ch} \lambda \xi), \quad \cos \lambda \xi_0 \operatorname{ch} \lambda \xi_0 = 1, \quad (2.12)$$

$$\alpha = \frac{\sin \lambda \xi_0 - \operatorname{sh} \lambda \xi_0}{\cos \lambda \xi_0 - \operatorname{ch} \lambda \xi_0}.$$

Отсюда находим

$$\lambda = 4,73 \frac{R}{L}. \quad (2.13)$$

Для оболочек средней длины критическое давление в этом случае увеличивается в 1,5 раза по сравнению с критическим давлением свободно опертой оболочки

$$q = 1,5q_0. \quad (2.14)$$

Аналогично могут быть рассмотрены и другие варианты граничных условий. Некоторые из них приведены в табл. 8.1. Результаты 1, 8—13 были получены А. В. Саченковым [8.14], результаты 7—17 — Н. А. Алфутовым [8.2]. Случаи 14—16 соответствуют комбинациям упругой заделки в осевом направлении с другими граничными условиями, c — коэффициент упругости заделки. Величина k_q в этом случае дается графиками рис. 8.2 в зависимости от cL/Eh . Результаты табл. 8.1, полученные из приближенных уравнений, подтверждаются более точными результатами, полученными Соублом [8.28] из уравнений пологих оболочек и В. И. Мяченковым [8.11]. На рис. 8.3 представлены

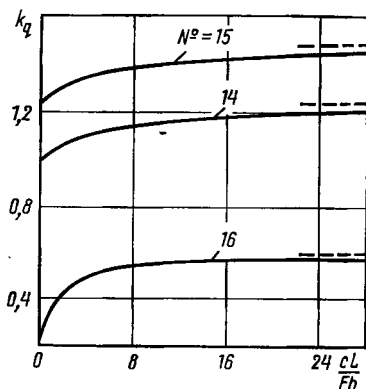


Рис. 8.2. Зависимость относительного критического давления от коэффициента упругости заделки.

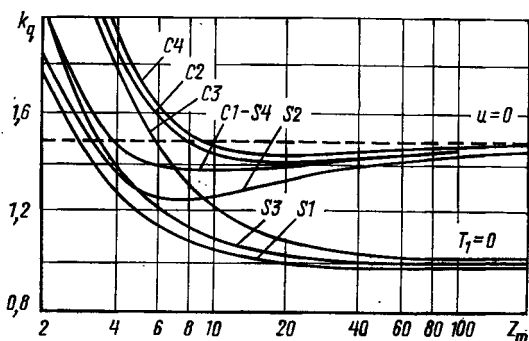


Рис. 8.3. Относительное критическое давление оболочек с различными граничными условиями.

результаты [8.11], полученные методом конечных разностей в зависимости от безразмерного геометрического параметра оболочки $Z_m = \sqrt{(1 - \nu^2)} (L/R) (R/h)^{1/2}$. Из полученных результатов можно заключить, что ограничение осевых смещений существенно

изменяет величину критического давления. Ограничение по углу поворота образующих сказываются только у очень коротких оболочек ($Z_m < 6$). Ограничение окружного смещения почти не влияет на устойчивость оболочки.

§ 3. Влияние моментности исходного состояния

Безмоментное исходное состояние реализуется только у случаев, когда опорные устройства не препятствуют свободному расширению оболочки в радиальном направлении. При наличии стеснений образующие оболочки искривляются. Возникают переменные по длине окружные усилия.

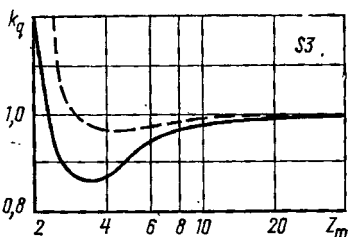


Рис. 8.4. Зависимость относительного критического давления свободно опертой оболочки от параметра Z_m .

Приближенные решения задачи при простейшей аппроксимации функции $f(x)$ были получены в работах Зандена, Тольке, Рейнольдса, Палия, Мека (см. [5.1]). В работе Браша и Альмрота [8.17] для свободно опертой оболочки получено более аккуратное решение методом Релея — Ритца. Решение построено в тригонометрических рядах. В большинстве числовых примеров не было обнаружено заметного влияния моментности исходного состояния. Исключение составляли очень короткие ($L/R < 1$) и толстые оболочки ($R/h \sim 100$), для

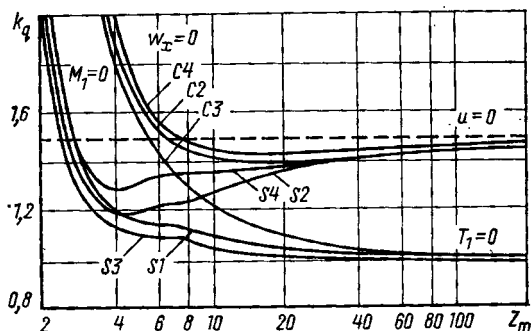


Рис. 8.5. Относительное критическое давление оболочек с различными граничными условиями.

которых это влияние приводило к некоторому увеличению критического давления. Другие граничные условия исследовали Ямаки [8.23] методом Бубнова и В. И. Мяченков [8.11] методом конечных разностей. На рис. 8.4 показано по результатам

[8.11] отношение критического давления свободно опертой оболочки к критическому давлению по формуле Саутуэлла — Папковича. Пунктирная линия получена без учета искривлений образующих ($w_{xx}^0 = 0$). При $Z_m > 10$ моментность исходного состояния не влияет на устойчивость оболочки ($k_q = 1$). При $Z_m < 2,5$ (очень короткие оболочки) учет моментности приводит к повышению критического давления. В промежуточной зоне наблюдается снижение (до 15%) критического давления. Это снижение в основном обусловлено влиянием искривлений образующих в исходном состоянии. На рис. 8.5 показаны результаты расчетов для других вариантов граничных условий. Таким образом, можно считать, что моментность исходного состояния не влияет на величину критического давления оболочек средней длины и длинных оболочек.

В заключение приведем результаты исследования устойчивости оболочки, имеющей на краях упругие кольца. На рис. 8.6 показаны графики, полученные Ю. И. Бадрухиным [8.4]. Через I_z , I_K обозначены моменты инерции поперечного сечения кольца при изгибе из его плоскости и полярный момент инерции. При малых значениях I_z , I_K величина k_q близка к величине k_q для свободно опертой оболочки. С увеличением I_z , I_K величина k_q растет и достигает значения k_q , близкого к k_q защемленной оболочки. Существенное изменение критического давления происходит в диапазоне I_z/R^4 , $I_K/R^4 = 10^{-6} \div 10^{-4}$. При этом увеличение только одной жесткости I_z или I_K при малой величине другой жесткости не приводит к увеличению критического давления, так что даже при очень большой изгибной жесткости из плоскости кольца критическое давление будет близким к критическому давлению свободно опертой оболочки, если жесткость кольца на кручение мала. Результаты рис. 8.6 получены при $L/R = 2$, $R/h = 97$. Расчеты показали, что в рассмотренном диапазоне изменения параметров зависимость от L/R слабая.

Таким образом, для предотвращения значительного снижения устойчивости оболочки необходимо обеспечить I_z/R^4 , $G I_K/R^4 E > 10^{-4}$. Например, для кольца квадратного поперечного размера a должно быть $(a/h)^4 > 12 \cdot 10^{-4} (R/h)^4$.

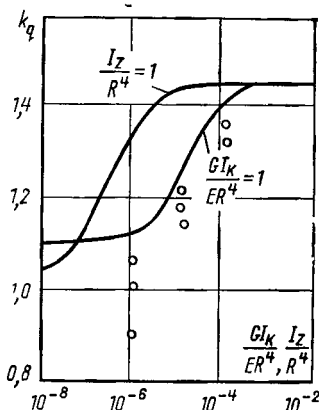


Рис. 8.6. Относительное критическое давление оболочки с упругими краевыми кольцами.

§ 4. Нелинейная задача

Все упомянутые результаты получены из линейных уравнений и, как правило, дают завышенные в сравнении с экспериментом значения критического давления. Причины этого расхождения те же, что и в случае осевого сжатия: нелинейность поведения оболочки, начальные несовершенства, несоответствие граничных условий в теории и эксперименте и пр.

Первые исследования нелинейной задачи содержатся в работах Нэша [8.27] (1955) и Ф. С. Исанбаевой [8.9] (1955). В дальнейшем нелинейные решения были получены в работах В. А. Нагаева [8.12], Н. А. Алфутова и В. Ф. Соколова [8.1], О. И. Терешко [11.14], А. В. Погорелова [4.10] и др.

Величина k_{qv} , полученная в большинстве работ, изменялась от 0,34 до 0,97. В некоторых работах, например [7.56], были обнаружены равновесные состояния с отрицательной величиной давления. Практического значения равновесные состояния с отрицательной величиной давления не имеют, соответствующие им амплитуды прогибов получаются очень большими. Однако наличие таких равновесных состояний указывает, с одной стороны, на приближенность решения, с другой стороны — на неприемлемость оценки устойчивости оболочки по нижнему критическому напряжению.

Согласно большинству результатов, при внешнем давлении, в отличие от осевого сжатия, величина нижнего критического давления не столь значительно отличается от величины верхнего критического давления. Однако эти результаты нельзя считать окончательными: все упомянутые решения нелинейной задачи носят приближенный характер, так как в них использовались функции прогиба, имеющие малое число свободных параметров, а граничные условия удовлетворялись неточно.

В книге [4.10] приводятся решения нелинейной задачи, полученные на основе геометрической теории устойчивости. Для неограниченно упругой геометрически совершенной оболочки величина нижней критической нагрузки определяется формулой

$$k_q = 1,26\varepsilon^{1/3} + 0,73\varepsilon^{1/2}, \quad \varepsilon = Rh/L^2. \quad (4.1)$$

Эта формула рекомендуется для случая, когда

$$0,4 \frac{h}{R} \left(\frac{hR}{L^2} \right)^{-1/3} < \sigma_{пч}. \quad (4.2)$$

Для стальной оболочки ($E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $\sigma_{пч} = 4 \cdot 10^3$ кг/см²) это условие при $R \approx L$ соответствует $R/h > 2800$.

В работе В. В. Михайлова [8.10] дано уточнение этой формулы

$$k_q = 1,45e^{2/3} + 3,03e. \quad (4.3)$$

При выводе формулы (4.3) удовлетворены все граничные условия шарнирного опирания.

§ 5. Учет начальных несовершенств

Б. В. Булгаков в 1930 г. [8.5], по-видимому, первым попытался исследовать влияние отклонения формы оболочки от круговой.

На основе нелинейной теории влияние начальных прогибов изучалось в работах Нэша [8.27] (1955), Доннелла [8.19] (1956),

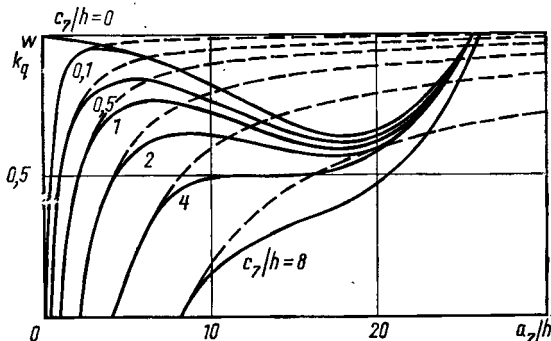


Рис. 8.7. Равновесные кривые оболочки с начальным прогибом.

А. С. Вольмира [8.6] (1957), В. С. Иванова [8.8] (1958), Х. М. Муштари и Ф. С. Исанбаевой [2.7]. В большинстве этих работ использовалась постановка Доннелла. Использовались функции прогиба, содержащие малое количество свободных параметров. В работе В. С. Иванова [8.8] рассматривается влияние начального прогиба, не совпадающего с прогибом выпучивания.

В решении Тилеманна и Эссингер [8.30] начальный прогиб задавался в виде

$$w^0 = [c_0 + c_n \cos n\varphi + c_{n+1} \cos (n+1)\varphi] \cos (\pi x/l). \quad (5.1)$$

Функция прогиба аппроксимировалась выражением, удовлетворяющим условиям свободного опирания. Решение задачи получено методом последовательных приближений. На рис. 8.7 показано отношение давления оболочки с периодическим начальным прогибом ($c_0 = c_{n+1} = 0$, $n = 7$) к критическому давлению совершенной оболочки в зависимости от амплитуды a_7/h .

Пунктирные кривые соответствуют линеаризованному решению

$$\omega = \omega_0 / (q - q_0). \quad (5.2)$$

На рис. 8.8 показана относительная величина верхнего критического давления в зависимости от относительной амплитуды начального прогиба. Оболочка во всех случаях имела

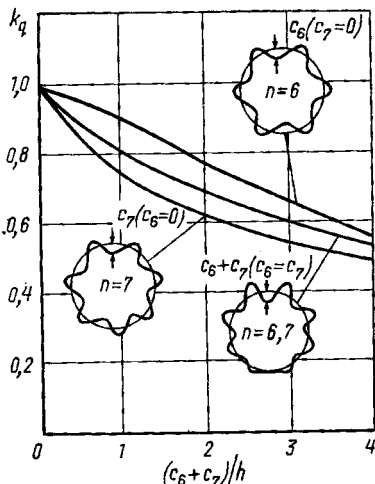


Рис. 8.8 Относительное критическое давление оболочек с начальными прогибами.

$$\bar{l} = (L/\sqrt{Rh}) \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} = 84, \\ R/h = 476.$$

А. В. Погорелов [4.10] для оболочек с начальной погибью, подобной ожидаемой форме потери устойчивости, получил формулу

$$k_q = 0,37e^{1/3} \frac{L}{a_0 h} \sqrt{\frac{h}{R}} + 0,726e^{1/2}. \quad (5.3)$$

Эта формула рекомендуется для больших значений амплитуды начальной погиби $a_0 h$. Для оболочек с ограниченной упругостью в этой же работе выведена формула

$$k_q = [(0,38/\omega_1^2) + 0,87\omega] e^{1/3} + 0,726e^{1/2}, \quad (5.4)$$

которая относится к оболочкам с параметром $\omega_1 > 1$ при

$$Eh/\sigma_{пч}R \leq 1.$$

§ 6. Эксперименты

Первое исследование устойчивости оболочек под действием внешнего давления провел в 1858 г. Фейербейрн [8.21]. Им было испытано 30 труб из сварочного железа и получена эмпирическая формула для критического давления. Впоследствии эксперименты были проведены Саутуэллом [8.29] (1913—1915), Винденбургом и Триллингом [8.31] (1934), Кливером [8.18] и рядом других исследователей. Большинство этих экспериментов неоднократно описывалось в литературе. Отметим наиболее интересные эксперименты последних лет.

На рис. 8.9 показаны кадры кинофильма потери устойчивости оболочки при гидростатическом давлении, полученные в работе [6.27] при испытании майларовых алюминированных

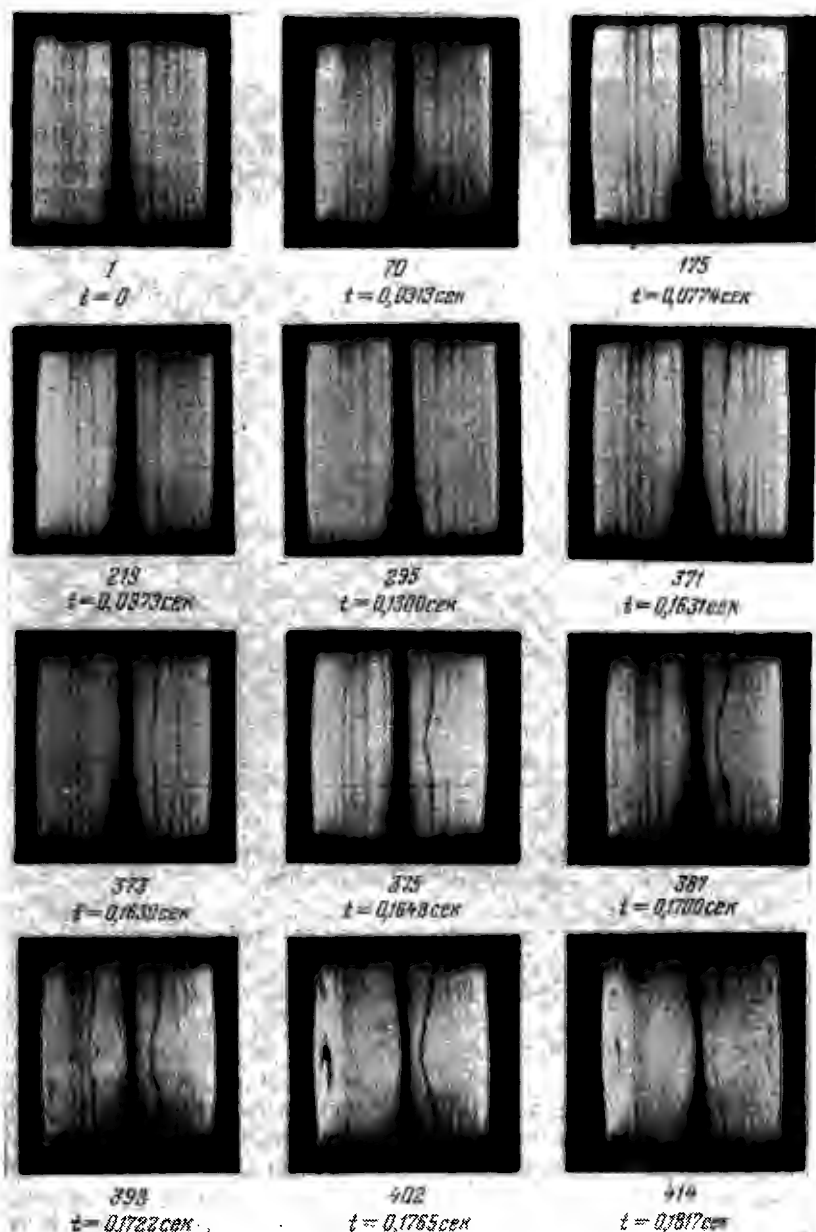


Рис. 8.9. Кадры скоростной съемки процесса потери устойчивости оболочки при внешнем давлении. Числа означают номера кадров.

оболочек. Скорость съемки 2250 кадров в секунду. Кадр первый — оболочка перед выпучиванием, начальных неправильностей не видно, было замечено вибрирование оболочки. Кадр 70 — начало образования выпучины слева, в кадрах 175, 219 — зарождение выпучины справа, выпучина слева развивается. Последующие кадры показывают постепенное распространение выпучин на всю поверхность.

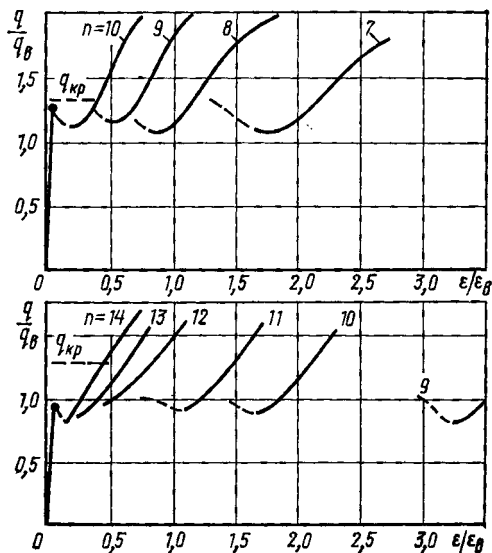


Рис. 8.10. Экспериментальные зависимости относительного давления от относительной деформации

На рис. 8.10 представлены диаграммы деформирования, полученные Тилеманном [7.56] на майларовых оболочках. Верхняя диаграмма соответствует оболочке с $L = 40$ см, $R = 20$ см, $h = 0.254$ мм, нижняя — $L = 20$ см, $R = 20$ см, $h = 0.254$ мм. Процесс выпучивания протекал следующим образом. Сначала деформации растут линейно. При критическом давлении происходит хлопок, причем потеря устойчивости начинается с образования местной выпучины, вслед за этим выпучины образуются по всей поверхности. Оболочка продолжает нести нагрузку. Падение нагрузки в закритической стадии, в сравнении с осевым сжатием, небольшое. Новое равновесное состояние имеет высокий уровень напряжений. Нагружение прекращалось при нагрузке, равной 150% от критической, чтобы избежать разрушения оболочки. При разгрузке происходит выхлоп. Соседние равновесные состояния нельзя было получить прямым путем нагру-

жения из-за высокого, по сравнению с критическим, уровня напряжений. Обмен формами выпучивания был получен путем разгрузки и повторного нагружения. Пунктирной горизонтальной линией показана теоретическая величина давления для защемленной оболочки, равная $q_{кр} = 1,3q_b$ согласно [8.26].

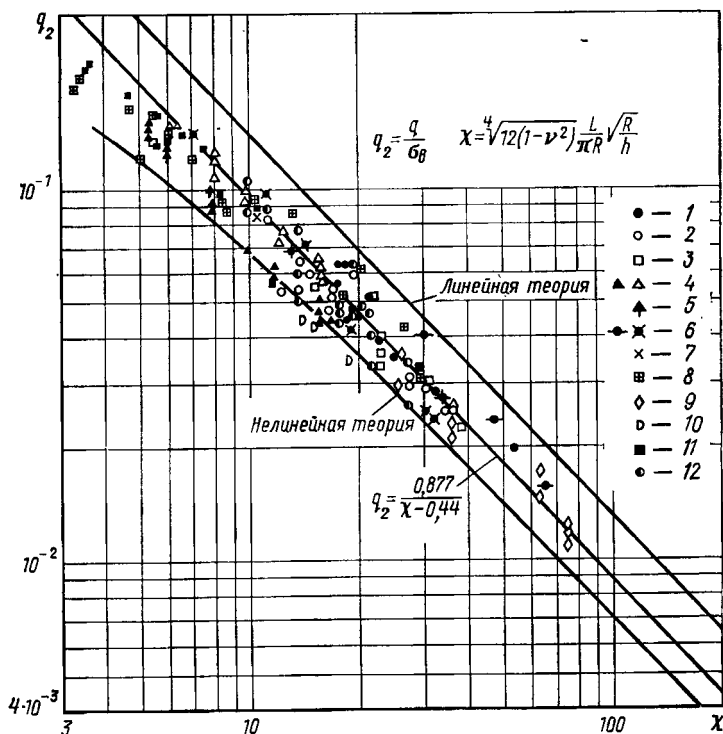


Рис. 8.11. Относительное критическое давление оболочек средней длины.

1—Исправников Л. Р., 2—Агамиров Р. Н., 3—Бурдин П. Г., 4—Нараев В. А., 5—Thielemann W. [7.56], 6—Sturm R. G., 7—Cleaver P. C. [8.18], 8—Redshaw S. C. [5.1], 9—Ekström R. E. [11.22], 10—Ebner H. [5.1], 11—Windenburg D. F., Trilling C. [8.31], 12—Weingarten V. I. [11.29].

Таким образом, эксперимент и теория качественно согласуются в вопросе наличия соседних форм равновесия, соответствующих различным n . Однако эксперимент указывает, во-первых, на отсутствие равновесных форм с отрицательным значением нижней критической нагрузки, во-вторых, на то, что в действительности, из-за высокого уровня напряжений в послекритической стадии, реализуется всегда равновесная форма с числом окружных волн $n = n_{кр}$, соответствующим первому хлопку.

Сравнение расчетов с экспериментами приведено на рис. 8.11, 8.12. Величина q_v определялась по формуле Саутуэлла-Папковича (1.13). Экспериментальные значения давления соответствуют максимальной величине давления, зафиксированной в момент потери устойчивости. Данные линейной теории нанесены

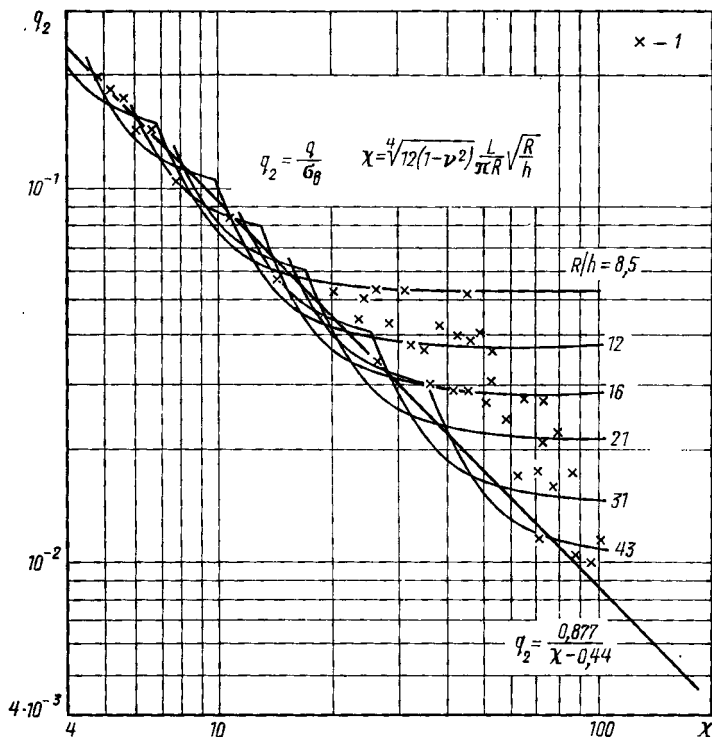


Рис. 8.12. Относительное критическое давление длинных оболочек.
1 — Cleaver P. C. [8.18].

для защемленной оболочки. Для свободно опертой оболочки по линейной теории $K_q = 1$. Кривая «нелинейная теория» взята из работы О. И. Теребушко [11.14]. Она соответствует $K_q = q_n/q_v$, $q_2 = q_n R/\sigma_v h$, q_n — нижнее критическое давление для свободно опертой оболочки. На рис. 8.11, 8.12 использованы логарифмические координаты, дающие наглядное представление результатов. Интересно отметить, что для оболочек средней длины критические напряжения при внешнем давлении примерно в χ раз меньше, чем при сжатии. Для практического использования более удобен рис. 8.13, на котором величины экспериментальных и

теоретических критических давлений отнесены к верхнему давлению свободно опертой оболочки. Параметр подобия χ характеризует геометрию оболочки. Малые значения χ соответствуют толстым или коротким оболочкам, большие — длинным или тонким.

Наблюдается общая закономерность увеличения коэффициента K_q с ростом χ и значительный разброс экспериментальных данных для заданного χ . Большинство экспериментальных

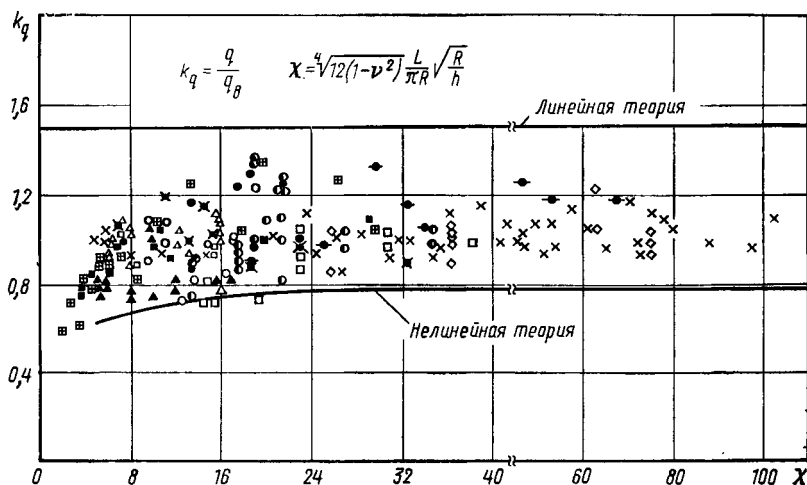


Рис. 8.13 Относительное критическое давление длинных оболочек и оболочек средней длины.

Обозначения см. на рис. 8.11.

данных получено в условиях гидростатического давления. Однако их можно считать справедливыми и для случая бокового давления, так как разница между этими двумя случаями незначительная: напряжения осевого сжатия, возникающие при гидростатическом давлении, примерно, в 2χ раз меньше критических напряжений и не сказываются на потере устойчивости. Во всех экспериментах оболочки, как правило, теряли устойчивость хлопком с образованием удлиненных по оси выпучин. Число окружных волн $n = 4 \div 14$. Влияние нелинейности сильнее сказывается для коротких оболочек.

Результаты Кливера [8.18], полученные на тщательно изготовленных оболочках с малым отношением $R/h = 8,5 \div 4,3$, хорошо согласуются с данными линейной теории для свободно опертой оболочки. Очевидно, что начальные несовершенства в этом случае не играли большой роли

Точеные оболочки на специальной установке, позволяющей давать боковое давление жидкостью, испытывались В. А. Нагаевым [8.12]. Образцы имели размеры $L/R = 0,5 \div 2$, $h = 0,5 \div 0,8$ мм, $R = 10,3$ см. Материал ст. 20, эллиптичность не превышала 0,05—0,06 мм, разностенность — 0,03 мм. Исследовались три типа граничных условий: шарнирное опирание, защемление и опирание (образец с промежуточной диафрагмой). У оболочек с упругим защемлением образовались эллиптические суживающиеся к краям выпучины. При шарнирном опирании выпучины имели прямоугольную форму. При смешанных граничных условиях было смешанным и волнообразование. Критическое давление для шарнирно опертых образцов составляло 73—90% от верхнего критического давления. Короткие образцы ($L/R = 0,7 \div 2$) дают лучшее совпадение с результатами нелинейной теории, длинные же — с линейной теорией. Очень короткие оболочки ($L/R < 0,7$) теряли устойчивость при нагрузке, меньшей нижней критической. Для оболочек с упругим защемлением критическая нагрузка на 20—30% выше нагрузки оболочек с шарнирным опиранием и ниже на 25—43% верхней критической нагрузки защемленной оболочки. В зависимости от длины оболочки соотношение между экспериментальной и теоретической критическими нагрузками изменяется точно так же, как и при шарнирном опирании. С укорочением оболочки расхождение увеличивается.

В эксперименте В. Е. Минеева было проведено исследование влияния начальных несовершенств. Образцы точеные из Д16Т, $R/h = 90 \div 180$, $L/R = 2,2$. Выпучины делались с помощью специального штампа обращенными к центру кривизны. Оболочки без выпучин теряли устойчивость с образованием шести вмятин по окружности. При числе выпучин 1, 2, 3, 6 критическое давление составляло 70% от критического давления совершенной оболочки, причем искусственные выпучины служили очагом образования новых выпучин. При числе искусственных выпучин, равном 5, 7, критическое давление было несколько выше, чем в предыдущем случае. При этом образовалось тоже 5, 7 выпучин. При числе выпучин $n = 4$ критическое давление получалось равным давлению совершенной оболочки или даже превышало его. Таким образом, влияние начальной погиби зависит от ее формы. Наиболее опасны погиби, соответствующие ожидаемому волнообразованию ($n = 6$). Если же начальные неправильности не соответствуют форме выпучивания идеальной оболочки ($n \neq 4$), критическое давление может оказаться даже выше, чем при отсутствии начальных неправильностей. Уменьшение критического давления начинается при амплитуде начальной погиби, равной примерно 0,25 от толщины оболочки.

Подводя итог сказанному, следует отметить, что задача устойчивости при внешнем или гидростатическом давлении в настоящее время разработана сравнительно меньше, чем задача осевого сжатия. В будущем, вероятно, следует получить более точные решения нелинейной задачи в высших приближениях и с более аккуратным учетом граничных условий и начальных несовершенств. Для этой задачи граничные условия играют более существенную роль, чем при сжатии. Следует также провести серию широких экспериментов на оболочках, изготовленных из упругих материалов, или же на аккуратно изготовленных электролитическим способом оболочках. Для практических же расчетов следует использовать верхнее критическое давление для свободно опертой оболочки, скорректированное данными экспериментов (рис. 8.13).

Г л а в а IX

КРУЧЕНИЕ

В этой главе будут рассмотрены задачи устойчивости оболочки, нагруженной по краям крутящими моментами (рис. 9.1).

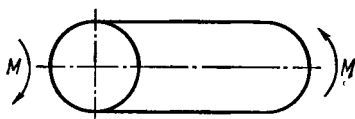


Рис. 9.1 Круговая цилиндрическая оболочка при кручении моментами.

§ 1. Линейная задача. Классическая постановка

Первое аналитическое решение задачи получил в 1924 г. Шверин [9.14]. Для длинных оболочек, теряющих устойчивость с переходом круговых сечений в овал ($n = 2$), Шверин получил формулу

$$\tau_b = \frac{E}{4,24 (1 - \nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}. \quad (1.1)$$

Формула (1.1) может быть получена из характеристического уравнения (1.5) гл. VI ($T_1^0 = T_2^0 = 0$)

$$k_2^2 D (n^2 - 1)^2 + E h \lambda^4 n^{-4} - 2 S^0 \lambda n^{-1} (n^2 - 1) = 0. \quad (1.2)$$

Касательное усилие $S^0 = \tau h$ связано с крутящим моментом формулой Бредта $S^0 = M_K/2\pi R^2$. Из уравнения (1.2) получаем

$$2S^0 = \frac{Eh}{2\sqrt{2}} (2C)^{3/2} \left[\omega_m (n^2 - 1)n + \frac{1}{\omega_m^3 n^3 (n^2 - 1)} \right], \quad (1.3)$$

$$\omega_m = \frac{\sqrt{C}}{\lambda}, \quad C = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}.$$

Из условия минимума $\partial S^0 / \partial \omega_m = 0$ находим

$$\omega_m^4 = \frac{3}{n^4 (n^2 - 1)^2}, \quad (1.4)$$

при этом

$$S^0 = \frac{Eh}{3\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \frac{1}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}. \quad (1.5)$$

Наименьшее значение усилия соответствует $n = 2$

$$S^0 = \frac{Eh}{3\sqrt{2}} \frac{1}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}. \quad (1.6)$$

Параметр λ определяется выражением

$$\lambda^4 = \frac{1}{1 - \nu^2} \frac{h}{R}. \quad (1.7)$$

Это и есть формулы Шверина. Форма потери устойчивости длинной оболочки имеет две волны по окружности, идущие по спирали вдоль оболочки. Шаг спирали равен

$$l = \frac{2\pi R n}{\lambda}. \quad (1.8)$$

При решении задачи мы не учитывали условий на краях оболочки. Если оболочка не слишком длинная, то эти условия могут оказать значительное влияние. Решение с учетом всех граничных условий получить трудно. Обычно удовлетворяют наиболее существенное из них $w = 0$. Прогиб при этом можно взять в виде суммы двух членов ряда

$$w = C [\sin(\lambda_m \xi - n\varphi) - \sin(\lambda_{m+2} \xi - n\varphi)], \quad (1.9)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi R}{L}, \quad \lambda_{m+2} = \frac{(m+2)\pi R}{L}. \quad (1.10)$$

Подставив выражение прогиба (1.9) в уравнение устойчивости

$$D\nabla^4 w + Ehk_2^2 \nabla^{-4} w_{xxxx} - 2S^0 w_{xy} = 0 \quad (1.11)$$

и приравняв нулю множители при одинаковых синусах, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} S^0 &= \frac{1}{2\lambda_m n} \left[k_2^2 D (\lambda_m^2 + n^2)^2 + \frac{\lambda_m^4 E h}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} \right], \\ S^0 &= \frac{1}{2\lambda_{m+2} n} \left[k_2^2 D (\lambda_{m+2}^2 + n^2) + \frac{\lambda_{m+2}^4 E h}{(\lambda_{m+2}^2 + n^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Величины λ_m , λ_{m+2} малы в сравнении с n , поэтому можно считать $\lambda_m^2 \ll n^2$, $\lambda_{m+2}^2 \ll n^2$. Введя подстановку

$$a = \lambda_2^{-4} n^8 k_2^2 \frac{D}{Eh}, \quad b = \frac{\lambda_m}{\lambda_2} = \frac{m}{2}, \quad f = b(1+b), \quad \lambda_2 = \frac{2\pi R}{L}, \quad (1.13)$$

из условия совместности системы (1.12) получаем уравнение

$$3f^2 + f - a = 0, \quad (1.14)$$

отсюда находим

$$f = (1/6)(\sqrt{1+12a} - 1), \quad (1.15)$$

а следовательно, и

$$b = (1/2)(\sqrt{1+4f} - 1). \quad (1.16)$$

Из первого уравнения системы (1.12) получаем

$$2S^0 = \frac{(a+b^4)Eh\lambda_2^3}{n^5 b}. \quad (1.17)$$

Величину n здесь следует подобрать так, чтобы S^0 было наименьшим. Перепишем (1.17) в виде

$$\lambda_s = \frac{2S^0}{\lambda_2^{1/2} (k_2^2 D)^{5/8} (Eh)^{3/8}} = b^{-1} a^{3/8} + b^3 a^{-5/8}. \quad (1.18)$$

Условие $\partial \lambda_s / \partial a = 0$ приводит к уравнению [10.1]

$$b[(1+4f)(1+12a)]^{1/2}(3a-5b^4) - 8a(a-3b^4) = 0, \quad (1.19)$$

положительный корень которого $a = 5,21$. При этом $b = 0,68$, $\lambda_s = 2,81$,

$$n^2 = \lambda_2 \left[\frac{12aR^2(1-\nu^2)}{h^2} \right]^{1/4}, \quad (1.20)$$

$$S^0 = k_b \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/4} \left(\frac{R}{L} \right)^{1/2}, \quad k_b = 0,74. \quad (1.21)$$

Эта формула с коэффициентом $k_b = 0,69$ впервые была получена Х. М. Муштари [9.4] в 1934 г. Уточнение числового коэффициента k_b в этой формуле приведено в монографии [2.7] (1957), где получено $k_b = 0,725$. Формулы, аналогичные (1.21), с различными числовыми коэффициентами были получены

Батдорфом в 1947 г. [5.3, 9.5] ($k_b = 0,705$), в 1954 г. — В. М. Даревским [10.1] ($k_b = 0,740$), А. В. Погореловым [4.10] ($k_b = 0,753$), В. А. Марьиным [10.3] ($k_b = 0,740$), О. И. Теребушко [11.14] ($k_b = 0,775$). Батдорф решение строил в тригонометрических рядах для защемленных ($u = S = w = w_x = 0$) и опертых оболочек ($T_1 = v = w = w_{xx} = 0$).

Формула (1.21) относится к оболочкам средней длины. Для коротких оболочек и оболочек средней длины решения были даны в 1933 г. Доннеллом [9.7]

$$\tau_b = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \left\{ 4,6 + \left[7,8 + 1,67 \left(\sqrt{1-\nu^2} \frac{L^2}{2Rh} \right)^{3/2} \right]^{1/2} \right\} \quad (1.22)$$

для защемленной по краям оболочки ($v = w = w_x = 0$) и

$$\tau_b = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \left\{ 2,8 + \left[2,6 + 1,4 \left(\sqrt{1-\nu^2} \frac{L^2}{2Rh} \right)^{3/2} \right]^{1/2} \right\} \quad (1.23)$$

для свободно опертой оболочки ($v = w = w_{xx} = 0$). Доннелл разыскивал решение уравнений устойчивости в тригонометрических рядах, удерживая в них четыре члена. При этом характеристическое уравнение имеет четвертую степень аналогично случаю длинной пластины при сдвиге.

Используя параметр подобия χ , формулы (1.22), (1.23), (1.21) представляем в следующем виде:

$$\tau_2 = f_4 = \frac{1,73}{\chi^2} [1,63 + 0,593 (2,76 + \chi^3)^{1/2}], \quad (1.24)$$

$$\tau_2 = f_2 = \frac{1,73}{\chi^2} [1 + 0,544 (1,092 + \chi^3)^{1/2}], \quad (1.25)$$

$$\tau_2 = \frac{1,325 k_b}{\sqrt{\chi}}, \quad (1.26)$$

где $\tau_2 = \tau_b/\sigma_b$ — отношение критического касательного напряжения к верхнему критическому напряжению сжатия. Из последней формулы видно, что величина τ_2 для оболочек средней длины обратно пропорциональна корню квадратному из χ . Касательное напряжение по формуле (1.21) при $k_b = 0,74$ примем за верхнее критическое напряжение для свободно опертой оболочки средней длины

$$\tau_b = 0,74 \frac{E}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}, \quad \tau_2 = \frac{0,984}{\sqrt{\chi}}, \quad (1.27)$$

при этом

$$n = 4,2 (1-\nu^2)^{1/8} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/4} \left(\frac{R}{h}\right)^{1/4}, \quad \nu = 1,73 \left(\frac{Rh}{L^2}\right)^{1/4}. \quad (1.28)$$

Формула (1.27) применима при

$$8 \leq \chi \leq 1,8 (R/h)^2. \quad (1.29)$$

§ 2. Влияние граничных условий

Детальное исследование влияния различных граничных условий выполнено Н. А. Алумяэ [9.1] и Ямаки [9.17]. Н. А. Алумяэ в результате качественного исследования уравнений устойчивости и граничных условий свел уравнения устойчивости к одному уравнению четвертого порядка. При этом считалось, что форма потери устойчивости в основном соответствует чистому изгибанию. Из приведенного анализа установлено, что существенными

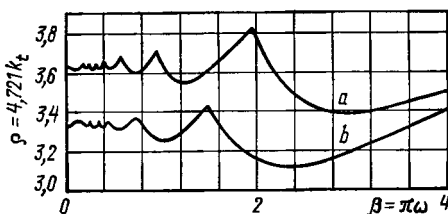


Рис 9.2 Относительное критическое усилие сдвига.

являются условия, налагаемые на прогиб и продольное смещение. Решение получено для оболочек произвольной длины при двух вариантах граничных условий: 1) $w = u = 0$, 2) $w = T_1 = 0$. Критическое усилие представлено формулой

$$S = 0,286\rho S_a, \quad (2.1)$$

где ρ дано графиком (рис. 9.2). Огибающие этих графиков

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \rho &= 3,639(1 - 0,0239\beta + 0,0003\beta^2) \\ &\quad (C^{0,5} \leq \beta \leq 2,8), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \rho &= 3,322(1 - 0,0313\beta + 0,0005\beta^2) \\ &\quad (C^{0,5} \leq \beta \leq 2,1), \quad \beta = \frac{L}{R} \sqrt{C}, \end{aligned}$$

$$C = \frac{h}{R \sqrt{12(1-\nu^2)}},$$

Ямаки рассмотрел граничные условия: 1) $w = w_{xx} = u = v = 0$, 2) $w = w_x = u = v = 0$. Решение для оболочек средней длины строилось в рядах. Использовался метод Бубнова. Вычислены критические силы и формы потери устойчивости. Для значения $Z > 100$ результаты для граничных условий 1) и 2) практически совпадают, при этом величина $k_B = 0,77$. Таким образом, установлено, что условия по w_x , w_{xx} несущественны. Из сравнения с решением Батдорфа видно, что условия по v , τ

тоже не играют роли, а условия по u , T_1 являются важными. Ограничение продольных смещений u приводит к увеличению

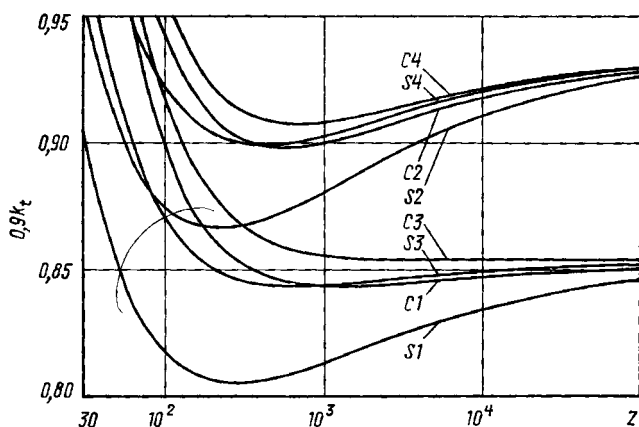


Рис. 9.3. Относительное критическое усилие сдвига оболочек средней длины при различных граничных условиях.

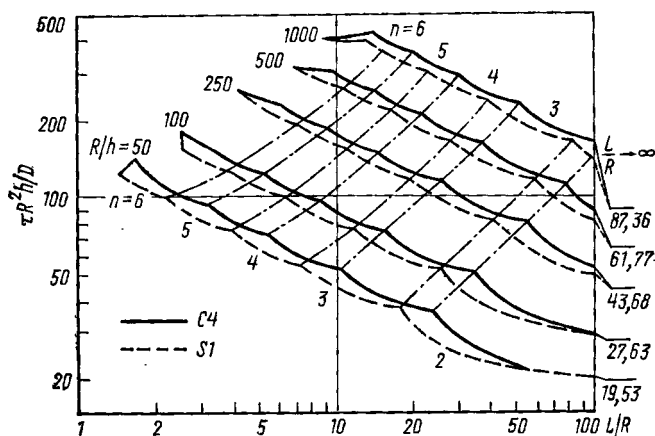


Рис. 9.4. Относительное критическое усилие сдвига длинных оболочек при граничных условиях S1, C4

критического напряжения примерно на 10%. Результаты вычислений для различных граничных условий показаны на рис. 9.3.

На рис. 9.4 показаны также результаты для длинных оболочек, полученные в [9.17] из решения уравнений Флюгге. Подобные результаты получены также в работе Штурма [9.16].

§ 3. Нелинейная задача. Учет начальных несовершенств

Расчеты по полученным в § 1, 2 формулам дают завышенные значения критических напряжений в сравнении с экспериментом. Нелинейные решения получены в работах [9.2, 9.9, 9.12] и др.

В 1954 г. Лу [9.9] получил приближенное решение нелинейной задачи с учетом начальных несовершенств. Функции прогибов задавались в виде

$$\begin{aligned} w &= ah [\sin \lambda_1 \xi \sin n(\varphi + \gamma \xi) + d (\cos \lambda_2 \xi - 1)], \\ w_0 &= \frac{a_0}{a} w. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Величина k_t зависела от χ и начальных несовершенств. Для идеальной оболочки при $\chi = 2,58; 8,2; 25,8$ было получено $k_t = 0,94; 0,8; 0,87$. Влияние нелинейности оказалось несколько более слабым, чем в случае внешнего давления. Была получена и приближенная формула

$$k_t = 1 - 0,75 \left[\frac{V}{(L^2/Rh)^{0,3}} \right]^{0,6}, \quad V = 2a_0, \quad (3.2)$$

откуда в предположении $l_1 \approx L$, $l_2 = ml_1 \approx mL$, $m = 0,722(L^2/Rh)^{-1/4}$, $\delta = 2$, $u_0 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ следует

$$k_t = 1 - 0,00201 M^{0,48}, \quad (3.3)$$

где

$$M = \frac{H}{(1 + 0,722/H)^{2,5}} \left(\frac{R}{h} \right)^{1,25}, \quad H = 1,31 \sqrt{\chi} = \left(\frac{L^2}{Rh} \right)^{1/4}. \quad (3.4)$$

Значения δ , u_0 здесь использованы те же, что и в случае осевого сжатия.

Уточнение решения Лу дано в работе Нэша [9.13], который рассмотрел защемленные и опертые оболочки. Функции прогиба соответственно задавались в виде

$$\begin{aligned} w &= ah [\sin(\varphi + \gamma \xi) (1 - \cos \lambda_2 \xi) + d (\cos \lambda_2 \xi - 1) + e], \\ w_0 &= (a_0/a) w, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} w &= ah [\sin n(\varphi + \gamma \xi) \sin \lambda_1 \xi + d \sin \lambda_1 \xi + l], \\ w_0 &= (a_0/a) w. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Влияние нелинейности оказалось более значительным, чем в работе Лу. Так, например, при $\chi = 25,8$ снижение нагрузки после потери устойчивости составляло 20% против 12% работы Лу. Из анализа расчетных данных были получены формулы:

$$k_t = 1 - 4,25 \left[\frac{V}{(L^2/Rh)^{0,3}} \right]^{0,6} \quad (3.7)$$

для заземленной оболочки и

$$k_t = 1 - 3,1 \left[\frac{V}{(L^2/Rh)^{0,3}} \right]^{0,6} \quad (3.8)$$

для свободно опертой оболочки. Значение «коэффициента несовершенства» V определяется из выражения (7.3) гл. VII. В результате при $\delta = 2$ находим

$$V = 2u_0 \left[\frac{m}{1+m} \frac{L}{h} \right]^2 = 2a_0. \quad (3.9)$$

Отсюда видно, что амплитуда начальных отклонений для тонких оболочек будет больше, чем для толстых. В работе Лу m определялось из решения линейной теории и было постоянным. Вообще же m увеличивается (n уменьшается) с ростом прогибов.

В работе Н. И. Кривошеева [9.3], выполненной независимо от работы Лу, исследовалась та же задача. В случае несимметричной неправильности рекомендована приближенная формула

$$k_t = 1 - 0,6a_0. \quad (3.10)$$

Согласно геометрической теории [4.10] величина нижней критической нагрузки геометрически совершенной неограниченно упругой оболочки примерно в четыре раза меньше величины верхней критической нагрузки ($k_{\text{ин}} = 0,225$). Это формула рекомендуется для оболочек, удовлетворяющих условию $\omega_2 > 1$ ($\omega_2 = \sigma_{\text{пч}} R / 4Eh$).

Для стальной оболочки, например ($E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$) $\sigma_{\text{пч}} = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$), это соответствует величине $R/h > 2000$. Из всего сказанного можно заключить, что при кручении влияние на устойчивость оболочки оказывают неосесимметричные начальные прогибы. Они существенно понижают верхнюю критическую нагрузку, но не так сильно, как в случае осевого сжатия. На величину нижней критической нагрузки начальные прогибы, как показано А. В. Саченковым [8.15], не оказывают значительного влияния.

§ 4. Эксперименты

Первые эксперименты было проведены Сецавой и Кубо [9.15], Лундквистом [9.10], Доннеллом [9.7]. Лундквист вывел эмпирическую формулу

$$\tau = 1,275E \left(\frac{R}{L} \right)^{0,46} \left(\frac{h}{R} \right)^{1,35}. \quad (4.1)$$

Сравнение экспериментальных данных с теоретическими показано на рис. 9.5, 9.6. Сплошными линиями даны теоретические

данные согласно формулам (1.23) — f_0 , f_2 , (1.22) — f_3 , f_4 , (1.27) — f_1 , $k_t = 1$. Пунктирной линией показана область экспериментальных точек, полученных в работах Лундквиста [9.10],

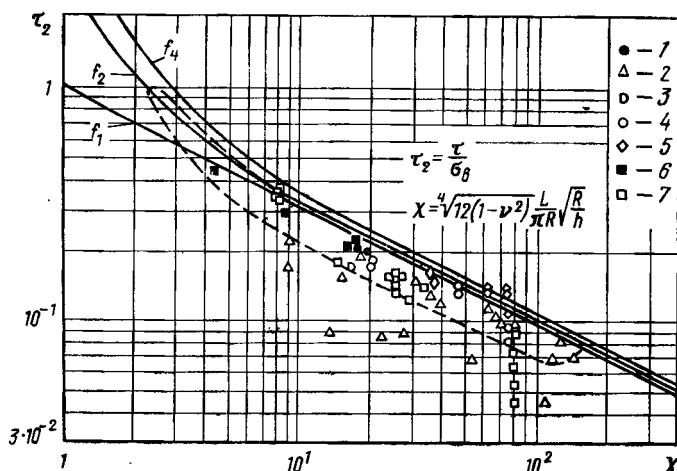


Рис. 9.5. Экспериментальные и расчетные относительные критические усилия сдвига.

1—Исправников Л. П., 2—Rabhakrishnan S. [26.18], 3—Марын В. А. [10.3], 4—Harris L. A. и др. [11.28], 5—Ekström R. E. [11.22], 6—Hopkins H. G., Brown E. H. [10.10], 7—Nash W. A. [9.11]; пунктир—Lundquist E. E. [9.10], Donnell L. [9.7], Bridget F. J. и др. [11.19].

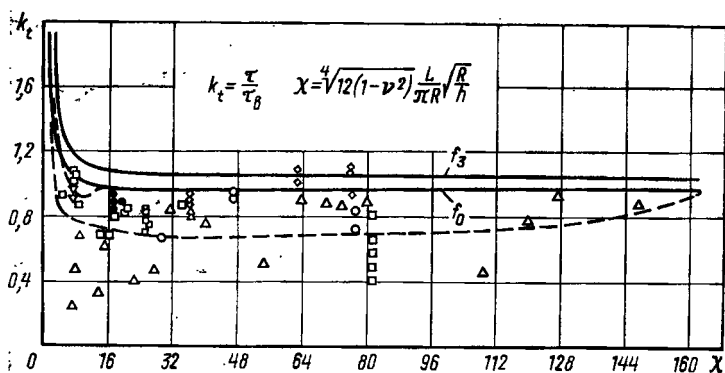


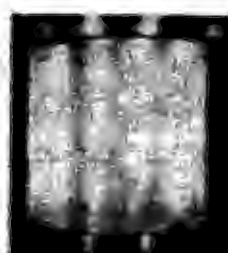
Рис. 9.6. Экспериментальные и расчетные относительные критические усилия сдвига.

Обозначения см. на рис. 9.5.

Доннелла [9.7] и др. Экспериментальные точки, лежащие ниже области 1, соответствуют потере устойчивости за пределом упругости. Отметим некоторые из экспериментов.



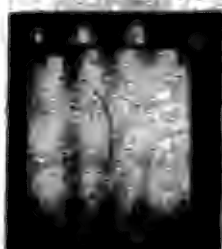
1
 $t = 0$



6
 $t = 0,00357 \text{ сек}$



11
 $t = 0,00714 \text{ сек}$



16
 $t = 0,01071 \text{ сек}$



18
 $t = 0,0121 \text{ сек}$



23
 $t = 0,0157 \text{ сек}$



27
 $t = 0,0186 \text{ сек}$



34
 $t = 0,0235 \text{ сек}$



38
 $t = 0,0265 \text{ сек}$



44
 $t = 0,0307 \text{ сек}$



57
 $t = 0,0400 \text{ сек}$



83
 $t = 0,0585 \text{ сек}$

ис. 9.7. Кадры скоростной киносъемки процесса потери устойчивости оболочки при кручении.

В эксперименте Крейта, Батдорфа и Бабба [10.5] исследовалось влияние способа крепления оболочки. Оболочки крепились с помощью колец, в одном случае только с внутренней стороны, а в другом — с обеих сторон. Первый случай ближе подходит к условиям свободного опирания, второй — защемления. Разницы в критических нагрузках не обнаружено.

Экстрем [11.22] испытал оболочки из нержавеющей стали. На рис. 9.7 показаны кадры кинофильма потери устойчивости, полученный [6.27] на майларовой оболочке. Скорость съемки 1400 кадров/сек. Оболочка перед испытаниями не имела видимых начальных дефектов. Кадры 1—18 показывают развитие малой выпучины в правой части оболочки. На кадрах 23—38 уже заметно развитие второй смежной выпучины. Кадры 44—57 показывают развитие третьей выпучины. В последнем кадре образец покрыт выпучинами по всей поверхности. Весь процесс потери устойчивости длился 0,0585 сек. На рис. 9.8 показана диаграмма деформирования оболочки.

Подводя итог сказанному, отметим, что к настоящему времени нет удовлетворительного решения задачи устойчивости при кручении. Эксперименты не подтверждают как линейную, так и нелинейную теорию. Отклонение от линейной теории составляет примерно 35%. Вероятно, как и в случае внешнего давления, следует ожидать более точных решений нелинейной задачи с учетом начальных несовершенств и более аккуратных экспериментов. В практических расчетах с начальными неправильностями порядка их толщины следует ориентироваться на величину верхнего критического напряжения, корректируя его данными рис. 9.6. При больших начальных неправильностях величину критических напряжений следует снижать примерно в 1,3 раза.



Рис. 9.8. Зависимость относительного касательного напряжения от параметра угла закручивания.

Глава X

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

При оценке влияния внутреннего давления на устойчивость идеальных оболочек следует иметь в виду два фактора. Во-первых, внутреннее давление вызывает дополнительные растягивающие осевые и окружные усилия безмоментного со-

стояния. Во-вторых, изменяя кривизну образующих, внутреннее давление способствует более интенсивному развитию краевых эффектов в исходном состоянии. Первый фактор в упругой зоне производит стабилизирующее действие, второй — наоборот. Если же уровень напряжений высок, то оба фактора приводят к преждевременной текучести материала у краев оболочки. В этом случае оболочка может потерять устойчивость в пластической зоне с образованием осесимметричных складок у краев. Влияние внутреннего давления на устойчивость несовершенных оболочек может проявляться также за счет выправления начальных вмятин.

§ 1. Осевое сжатие. Линейная задача

При потере устойчивости тонких оболочек от продольного сжатия с внутренним давлением по длине оболочки образуется

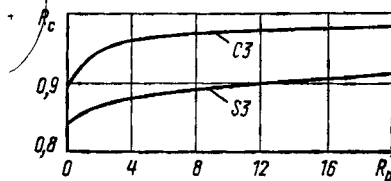


Рис 10.1. Относительное критическое усилие сжатия оболочки с внутренним давлением при различных граничных условиях

большое число волн, так что можно считать $\lambda^2 \gg n^2$. Из характеристического уравнения (1.4) гл. VI при этом имеем

$$N = -T_1^0 = k_2^2 D \lambda^2 + E h \lambda^{-2} + T_2^0 n^2. \quad (1.1)$$

Это выражение имеет минимум

$$N = T_v \left[1 + \frac{T_2^0}{T_v} \left(\frac{3}{1 - \nu^2} \right)^{1/2} \frac{h}{R} n^2 \right]^{1/2} \quad (1.2)$$

при

$$\lambda^2 = \left(\frac{E h + n^2 T_2^0}{k_2^2 D} \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Рис. 10.2. Относительное критическое усилие сжатия оболочки с внутренним давлением при граничном условии СЗ

Второе слагаемое под корнем значительно меньше единицы, так что можно считать $N \approx T_v$. Следовательно, влияние внутреннего давления оказывается несущественным, если считать исходное состояние безмоментным. Если же учесть моментность исходного состояния, то оказывается [6.24, 10.6, 10.7, 10.13], что внутреннее давление повышает

величину критического усилия. Решение для этого случая можно получить методом конечных разностей. Прогиб в исходном состоянии определяется выражением (начало координат помещено в середине оболочки, длина оболочки $L = 2l$)

$$w^0 = w_B (1 + f), \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} f &= A_1 \operatorname{ch} b_1 \eta \cos b_2 \eta + A_2 \operatorname{sh} b_1 \eta \sin b_2 \eta, \\ b_1 &= k_1 \psi_1, \quad b_2 = k_1 \psi_2, \\ \psi_1^2 &= 1 - N^*, \quad \psi_2^2 = 1 + N^*, \\ N^* &= R_c = \frac{N}{T_B}, \quad T_B = \frac{Eh^2}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ w_B &= -R \left(\frac{PR}{Eh} + \nu \frac{N}{Eh} \right). \end{aligned}$$

При свободном опирании краев оболочки ($w^0 = w_{xx}^0 = 0$):

$$\begin{aligned} A_1 &= -2 \frac{\operatorname{ch} c_1 \cos c_2 + \alpha_2 \operatorname{sh} c_1 \sin c_2}{\operatorname{ch} 2c_1 + \cos 2c_2}, \\ A_2 &= -2 \frac{\operatorname{sh} c_1 \sin c_2 - \alpha_2 \operatorname{ch} c_1 \cos c_2}{\operatorname{ch} 2c_1 + \cos 2c_2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

при защемлении краев ($w^0 = w_x^0 = 0$):

$$\begin{aligned} A_1 &= -2 \frac{\alpha_1 \operatorname{ch} c_1 \sin c_2 + \operatorname{sh} c_1 \cos c_2}{\operatorname{sh} 2c_1 + \alpha_1 \sin 2c_2}, \\ A_2 &= -2 \frac{\operatorname{ch} c_1 \sin c_2 - \alpha_1 \operatorname{sh} c_1 \cos c_2}{\operatorname{sh} 2c_1 + \alpha_1 \sin 2c_2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 \eta_m, \quad c_2 = b_2 \eta_m, \\ \eta_m &= \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \frac{l}{R} \sqrt{\frac{R}{h}}, \\ \alpha_1 &= \frac{\psi_1}{\psi_2}, \quad \alpha_2 = -\frac{N^*}{\psi_1 \psi_2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При этом продольное и окружное усилия

$$\begin{aligned} T_1^0 &= -N, \\ T_2^0 &= PR - E h k_2 w_B f. \end{aligned} \quad (1.8)$$

На рис. 10.1 показаны результаты Фишера [10.7], полученные при граничных условиях S3, C3:

$$R_P = \frac{P}{q_B}. \quad (1.9)$$

С увеличением параметра R_p критическое усилие растет, приближаясь к предельной величине $R_c = 1$. На рис. 10.2 показан результат Альмрота [6.24] для граничных условий S2. Альмрот рассмотрел восемь вариантов граничных условий S1—S4, C1—C4. Близкие к упомянутым результаты получены раньше Штейном [10.13] для граничных условий S1, S2.

§ 2. Нелинейная задача

Нелинейные решения задачи получены в работах [10.4, 10.12, 10.14]. Большинство из этих работ выполнено в традиционной постановке в первом приближении. В работе Ло, Крейта и

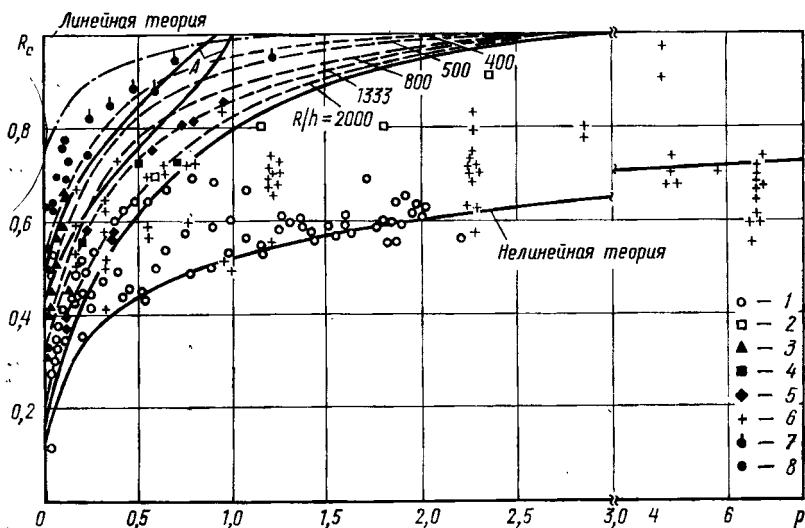


Рис. 10.3. Экспериментальные и расчетные значения относительного критического усилия сжатия оболочки с внутренним давлением.

1—Fung Y. C., Sechler E. E. [10.8], 2—Buchy L. G. [5.1], 3—Lo H., Crate H. S., Schwartz E. B. [10.12], 4—Holmes M. [5.1], 5—Brown J. K., Rea R. H. [5.1], 6—Harris L. A. и др. [10.9], 7—Fischer G. [10.7], 8—Исправников Л. П., А—Dow M. B., Peterson J. P. [5.1]; сплошные, пунктирные и штрихпунктирные линии—Weingarten V. I. и др. [10.15].

Шварца [10.12] (1950) при $P = 0$ получено $R_c = 0,610$. С увеличением давления величина R_c растет. Пределом служит классическая верхняя критическая нагрузка, которая достигается при $\bar{P} = PR^2/Eh^2 = 0,169$. В работе Тилеманна [10.14] (1960) при $\bar{P} = 0 \div 0,152$ $R_{cn} = 0,3 \div 0,95$.

Форма потери устойчивости существенно зависит от внутреннего давления. С увеличением давления выпучины вытягиваются

по окружности. Альмрот и Браш [10.4] (1963) использовали функцию прогиба (6.1) гл. VII с удержанием членов a_{00} , a_{11} , a_{02} , a_{20} , a_{40} , a_{22} , a_{33} . Энергия в методе Ритца — Папковича варьировалась по восьми параметрам. Построены диаграммы хлопка для различных значений давления. Нижняя критическая нагрузка, как и в работе Тилеманна, возрастала с увеличением давления, но величина ее при равных давлениях была меньше, так как в ряде для прогиба удерживалось большое количество членов. Добавление числа членов до одиннадцати незначительно ($\approx$ на 4%) снижало результат. Кривая $R_{сн} = R_{сн}(\bar{P})$ работы [10.4] показана на рис. 10.3 (нелинейная теория).

§ 3. Эксперименты

В 1951 г. Лу, Крейт и Шварц [10.12] испытали повторно семь раз оболочку из алюминиевого сплава 24ST ($L = 812$ мм, $R = 762$ мм, $h = 0,6$ мм) в диапазоне изменения давления $\bar{P} = 0 \div 0,1$. Давление создавалось воздухом. Экспериментальные величины коэффициента R_c равнялись соответственно 0,31—0,66. Зависимость $R_c = R_c(\bar{P})$ получилась примерно линейной. Значения R_c были меньше теоретических, полученных в этой же работе, и указывали на существенное повышение критического усилия с ростом давления. Более полное исследование на оболочках из того же сплава было проведено Фыном и Зехлером [10.8] (1957). Оболочки имели размеры $R/h = 58 \div 175$, $L/R = 6,3$, $h = 0,0254 \div 0,0762$ мм, $L = 279$ мм, $R = 89$ мм. Давление создавалось воздухом, величина $\bar{P}$ изменялась в пределах $\bar{P} = 0 \div 2,06$. При малых значениях $\bar{P}$ оболочки теряли устойчивость хлопком, форма выпучин — как при сжатии. С увеличением давления выпучины вытягивались по окружности, при больших давлениях образовывались кольцевые выпучины. Качественно эксперимент подтвердил решение [10.12], однако предел, до которого внутреннее давление еще оказывается эффективным, получился больше, чем 0,169, причем величина наибольшего критического усилия составляла примерно две трети от классического ($R_c = 2/3$). Авторы [10.8] рекомендовали определять R_c по формулам: $R_c = k_c + 0,314 \bar{P}$ при $\bar{P} < 1,2$ и $R_c = k_c + 0,378$ при $\bar{P} \geq 1,2$, где k_c берется для случая сжатия ($P = 0$).

Примерно такие же результаты получили и Гаррис, Сьюер, Скии и Бенджамин [10.9]. В этой работе дана статистическая обработка результатов экспериментов. Построены графики приращения осевого критического усилия от действия внутреннего давления в зависимости от параметра $\bar{P}$. При $\bar{P} > 1$ величина $\Delta R_c = 0,364$.

В работе [11.16] на основе данных [10.9] получена зависимость

$$R_c = k_c + \frac{1,73\bar{P}}{0,737 + 4,425\bar{P}}. \quad (3.1)$$

Результаты экспериментов приведены на рис. 10.3. Здесь же нанесены теоретические кривые по линейной и нелинейной теориям, полученные Альмротом и Брашем [10.4]. Прямая $R_c = 1$ соответствует классическому результату.

Большинство экспериментальных точек попадает в область, заключенную между

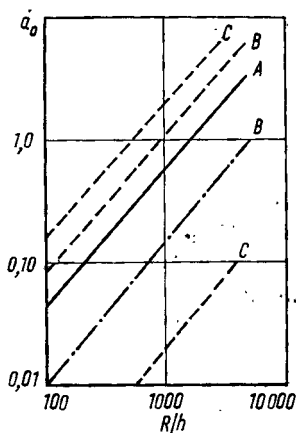
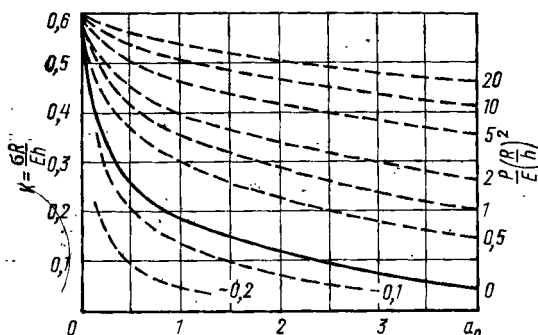


Рис. 10.4. Относительные критические напряжения сжатия оболочки с внутренним давлением.

Рис. 10.5. Значения относительной величины амплитуды начального прогиба

теоретическими кривыми. Выпадающие точки в правом нижнем углу, вероятно, соответствуют потере устойчивости за пределом упругости. Указанная область с ростом давления сужается, что свидетельствует об уменьшении с ростом давления влияния начальных неправильностей и нелинейности деформирования оболочки.

Нижнюю часть области занимают описанные выше эксперименты [10.8, 10.9]. В верхней части расположены результаты Фишера [10.6, 10.7], Вейнгартена, Моргана и Сейда [10.15] и Л. Р. Исправникова.

Пунктирными кривыми в верхней части графика нанесены нижние границы экспериментальных точек, полученных на майларовых оболочках в работе Вейнгартена, Моргана и Сейда [10.15]. Штрихпунктиром нанесена верхняя граница для случая $R/h = 400$, сплошная линия соответствует нижней экспериментально полученной критической нагрузке — постоянной для всех

R/h . Из рис. 10.3 видно, что внутреннее давление существенно повышает устойчивость оболочек, особенно при малых значениях параметра P . Теоретическая кривая Альмрота может служить нижней границей экспериментальных точек. Однако это решение не подтверждается экспериментом [10.15], что свидетельствует о наличии неучтенных факторов.

На рис. 10.4, 10.5 приведены графики $K = R_c/\sqrt{3(1-\nu^2)} = K(\bar{P}, a_0)$, полученные на основе большого количества экспериментальных данных [10.11] (a_0 — относительная величина амплитуды начального прогиба). Прямая A соответствует средним значениям a_0 , область $C-C$ — всем возможным значениям a_0 при заданном R/h .

В практических расчетах отлично изготовленных оболочек, вероятно, следует ориентироваться на эмпирические кривые, полученные Вейнгартеном, Морганом и Сейдом. Для оболочек с начальными неправильностями порядка толщины оболочки следует использовать теоретическую кривую, полученную Альмротом и Брашем. В этом решении желательно уточнить влияние граничных условий. Эти графики можно использовать так же, как и графики на рис. 10.4, 10.5.

§ 4. Кручение. Линейная задача

Решение задачи устойчивости возможного равновесного состояния оболочки при кручении с внутренним давлением можно получить, обобщив решение, приведенное в § 1 гл. IX для чистого кручения. Уравнения (1.12) гл. IX в этом случае будут содержать дополнительное слагаемое с $T_2^0 = PR$:

$$\begin{aligned} 2S^0 &= \frac{1}{\lambda_m n} \left(k_2^2 D n^4 + \frac{\lambda_m^4 E h}{n^4} + T_2^0 n^2 \right), \\ 2S^0 &= \frac{1}{\lambda_{m+2} n} \left(k_2^2 D n^4 + \frac{\lambda_{m+2}^4 E h}{n^4} + T_2^0 n^2 \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Обозначив,

$$a_1 = a + c a^{3/4}, \quad c = P/1, 2 q_b = R_p/1, 2, \quad (4.2)$$

получаем соответственно формулам (1.14) — (1.18) и уравнению (1.19) гл. IX следующие соотношения:

$$3f^2 + f - a_1 = 0, \quad (4.3)$$

$$f = 1/6 (\sqrt{1 + 12a_1} - 1), \quad b = 1/2 (\sqrt{1 + 4f} - 1), \quad (4.4)$$

$$2S^0 = \frac{(a_1 + b^4) E h}{b n^5} \lambda^3, \quad (4.5)$$

$$\lambda_s = \frac{2S^0}{\lambda_2^{1/2} (k_2^2 D)^{1/4} (E h)^{1/4}} = b^{-1} a^{3/8} + b^3 a^{-5/8} + c b^{-1} a^{1/8}, \quad (4.6)$$

$$b(1+4f)^{1/2}(1+12a_1)^{1/2}(3a-5b^4+ca^{3/4}) + 8a(3b^4-a-ca^{3/4})(1+\frac{3}{4}ca^{-1/4})=0. \quad (4.7)$$

Решение уравнения (4.7) дано графиком на рис. 10.6. Этот график вместе с формулами (4.3)–(4.6) позволяет вычислить критическое усилие сдвига. При $c=0$ из полученного решения следует решение для чистого кручения. Зависимость $R_t = \lambda_s/2,81$ отношения критического усилия сдвига к верхнему критическому усилию при чистом кручении от параметра внутреннего давления c также показана на рис. 10.6. В отличие от случая осевого сжатия наблюдается сильное поддерживающее влияние внутреннего давления. Кривые рис. 10.6 с удовлетворительной точностью аппроксимируются зависимостями:

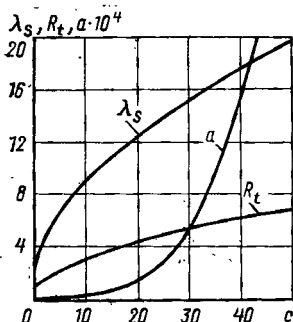


Рис. 10.6. Решение уравнения (4.7) и относительные величины критического усилия сдвига

$$\lambda_s = 2,81 R_t,$$

$$R_t = 1 + 0,24825c - 0,002525c^2 = \quad (4.8) \\ = 1 + 0,207R_p - 0,000175R_p^2.$$

Отметим иные решения этой же задачи. Первое исследование, по-видимому, было выполнено в 1944 г. Крейтом, Батдорфом и Баббом [10.5], которые обнаружили сильное поддерживающее влияние внутреннего гидростатического давления и вывели эмпирическую формулу

$$R_t^2 - R_p = 1, \quad (4.9)$$

где $R_t = \tau/\tau_b$, $R_p = P/q_b$, τ_b , q_b — верхние критические, касательное напряжение и внешнее давление, соответствующие случаям раздельного действия нагрузок. Впоследствии эта задача рассматривалась в работах Гопкинса и Брауна [10.10] (1951), В. М. Даревского [10.1] (1957), Н. И. Кривошеева [11.8] (1958), В. А. Марьина [10.3] (1959) и др.

§ 5. Эксперименты

Процесс потери устойчивости при наличии внутреннего давления протекает примерно так же, как и при чистом кручении. Однако количество волн и угол наклона волн к образующей с увеличением внутреннего давления увеличиваются. В случае малой длины образца наибольшие вмятины располагаются на окружности среднего сечения, при большой длине — на винтовой

линии. Кроме того, при большой длине оболочек выпучины образуются не по всей поверхности.

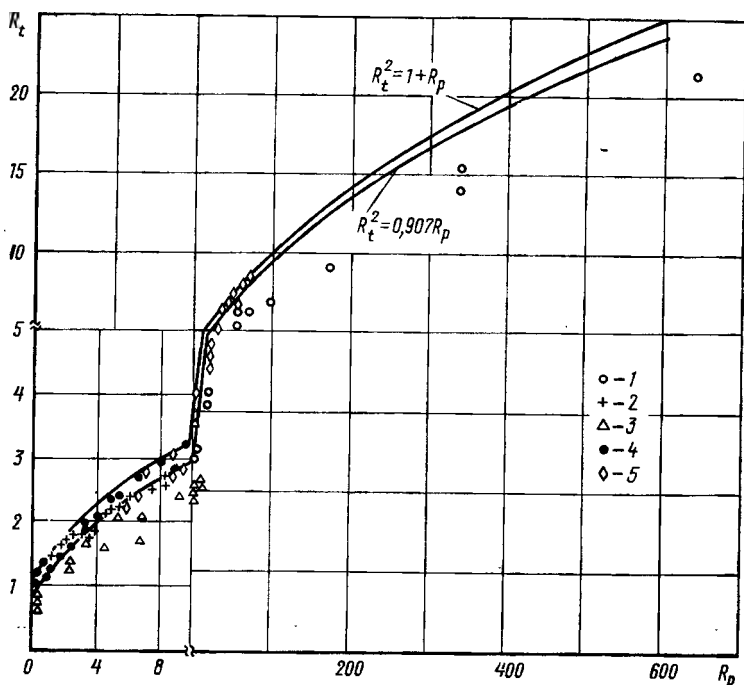


Рис. 10.7. Экспериментальные и расчетные значения относительного критического усилия сдвига оболочки с внутренним давлением.

1—Harris L. A. и др. [10.9], 2—Даревский В. М. [10.1], 3—Марьин В. А. [10.3], 4—Hopkins H. G., Brown E. H. [10.10], 5—Weingarten V. I. и др. [10.15].

Сравнение расчета с экспериментом показано на рис. 10.7. В практических расчетах, вероятно, можно использовать данные рис. 10.7, вводя поправочный коэффициент, равный примерно 0,85 (см. [6.6]).

Глава XI

КОМБИНИРОВАННОЕ НАГРУЖЕНИЕ

§ 1. Взаимодействие нагрузок

В этой главе будут рассмотрены задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки при совместном нагружении ее различными нагрузками. Критическое состояние оболочки в этом случае определяется совокупностью всех нагрузок. При действии

нагрузок это состояние в координатах нагрузок характеризуется некоторой ломаной линией или плавной кривой (рис. 11.1), отделяющей области устойчивого 1 и неустойчивого 2 состояний. Эти кривые называются границами устойчивости, или «кривыми взаимодействия». При n нагрузках получается n -мерная поверхность. В некоторых случаях, не решая задачи полностью, можно составить определенные представления о форме этой поверхности, опираясь на решение для отдельных случаев нагружения. Эти вопросы рассматриваются в качественной теории устойчивости оболочек. Основы ее были заложены в трудах П. Ф. Папковича [11.12, 11.13], который доказал несколько общих теорем. Отметим одну из них.

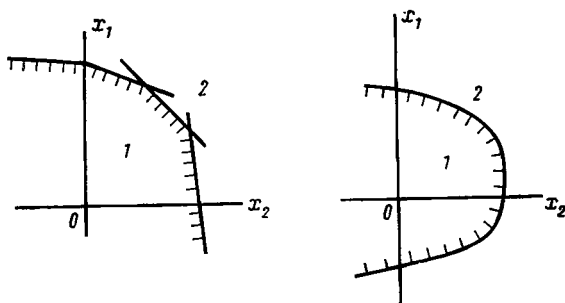


Рис 11.1 Граничные кривые при комбинированном нагружении.

Теорема о выпуклости граничной поверхности. Граничная поверхность не может быть обращена выпуклостью к области устойчивости.

Отсюда следует, что любой луч, проведенный из области устойчивости, либо вовсе не пересекает граничную поверхность, либо пересекает ее не больше одного раза. Если же провести отрезок, соединяющий две точки граничной поверхности, то этот отрезок или будет полностью лежать в области устойчивости, или будет составлять часть граничной поверхности.

Эта теорема была доказана в предположении линейной зависимости исходного состояния от нагрузки. В общем случае она может и не иметь места. В. В. Кабановым [6.12] и В. И. Мяченковым [20.7] в случае нелинейного исходного состояния были получены кривые взаимодействия с вогнутыми участками. В работах Б. М. Броуде [11.1, 11.2] уточняется область применимости теоремы П. Ф. Папковича. Показано, что теорема строго применима к граничной поверхности, соответствующей первому собственному значению, и неприменима к поверхностям, соответствующим высшим собственным значениям. Отмечается так-

же, что теорему в некоторых случаях можно распространить и на нижние критические нагрузки.

Теоремы П. Ф. Папковича позволяют, не решая задачи, составить представление о величине критических нагрузок. Так, например, из теоремы о выпуклости области устойчивости следует равенство

$$\sum_n R_n = 1, \quad (1.1)$$

где R_n — отношение нагрузок к их опытным или теоретическим критическим значениям при раздельном действии. Эта оценка безопасна, однако в некоторых случаях она может быть заниженной. В общем случае уравнение (1.1) имеет вид

$$F(R_n) = 0. \quad (1.2)$$

Первые исследования устойчивости оболочек при совместном действии нагрузок в основном были экспериментальные [11.17, 11.19]. В этих работах были выведены эмпирические зависимости для границ устойчивости. Теоретические решения появились позже. В основном они выполнены в линейной классической постановке. Методы решений и аппроксимации функций примерно те же, что и в случаях раздельного действия нагрузок. Поэтому в дальнейшем при изложении материала эти вопросы, как правило, обсуждаться не будут. Больше внимания будет уделяться конечным результатам работ.

§ 2. Внешнее давление с растяжением, сжатием

Линейная задача. В линейной классической постановке эта задача исследовалась в работах Флюгге [5.4], С. П. Тимошенко [4.16], Х. М. Муштари, А. В. Саченкова [11.11] и ряде других работ. В этих работах теми же методами, что и при раздельном нагружении, получены зависимости

$$F(q, T_1^0, \lambda, n, h/R, \nu) = 0.$$

При заданных $q, n, h/R, \nu$ эти зависимости линейны. Их графическое представление в координатах R_q, R_c можно найти в книгах [4.15, 4.16]. Границы устойчивости $R_q = R_q(R_c)$ представляют собой ломаные линии, обращенные выпуклостью от начала координат, что находится в соответствии с теоремой П. Ф. Папковича. В первом приближении эти границы можно аппроксимировать линейей

$$R_q + R_c = 1, \quad (2.1)$$

где

$$R_q = q/q_b, \quad R_c = \sigma/\sigma_b.$$

Здесь q , σ — критические значения давления и осевого напряжения, q_v , σ_v — то же самое при их раздельном действии.

В работах [11.11, 2.7] получено

$$R_q + 0,866R_c = 1, \quad (2.2)$$

а в работе [11.14] —

$$R_q^{5/4} + R_c = 1. \quad (2.3)$$

Можно получить и более точные формулы, если проминимизировать зависимость F по n и λ . Используем для этого характеристическое уравнение, выведенное в гл. VI.

Оболочки средней длины. Из уравнения 1.4 гл. VI имеем

$$\frac{Rq}{Eh} = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \left[\frac{T_1^0}{Eh} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12R^2(1 - \nu^2)} \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} \right]. \quad (2.4)$$

Введя обозначения:

$$R_c = -\frac{T_1^0}{T_v}, \quad q_2 = \frac{qR}{T_v}, \quad \chi = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{\alpha_1}}, \quad \alpha_1 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad (2.5)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\chi}, \quad z_1 = \mu\alpha_2, \quad \mu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2} \right),$$

преобразуем это равенство

$$q_2 = \frac{\alpha_2}{2z_1 - \alpha_2} \left[\frac{1}{2} \left(z_1^2 + \frac{1}{z_1^2} \right) - R_c \right]. \quad (2.6)$$

Запишем выражение производной q_2 по α_2

$$\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2} = \frac{2z_1}{(2z_1 - \alpha_2)^2} \left[\frac{1}{2} \left(z_1^2 + \frac{1}{z_1^2} \right) - R_c \right].$$

Функция $1/2(z_1^2 + z_1^{-2})$ имеет минимальное значение, равное единице. Величина R_c изменяется в пределах $1 \geq R_c \geq -1$. Следовательно, величина производной $\partial q_2 / \partial \alpha_2$ больше или равна нулю. При этом равенство нулю производной может иметь место только при $R_c = 1$. В этом случае оболочка теряет устойчивость при действии одного лишь продольного усилия $N = -T_1^0$. Исключая из рассмотрения этот крайний случай, имеем $\partial q_2 / \partial \alpha_2 > 0$. А это значит, что функция $q_2 = q_2(\alpha)$ монотонно возрастающая и имеет минимум при $m = 1$

$$\lambda = \lambda_1 = \pi R/L. \quad (2.7)$$

Из условия минимума функции q_2 по z_1 получим уравнение для определения величины μ

$$(\alpha_2 \mu)^4 = 3 + \frac{2}{\mu - 1} - \epsilon \mu^2 \left(1 + \frac{1}{\mu - 1} \right), \quad (2.8)$$

здесь

$$\varepsilon = 8R_c/\chi^2. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.6) совместно с (2.8) определяет границу устойчивости оболочки. Решение уравнения (2.8) для некоторых значений параметров представлено графически на рис. 11.2.

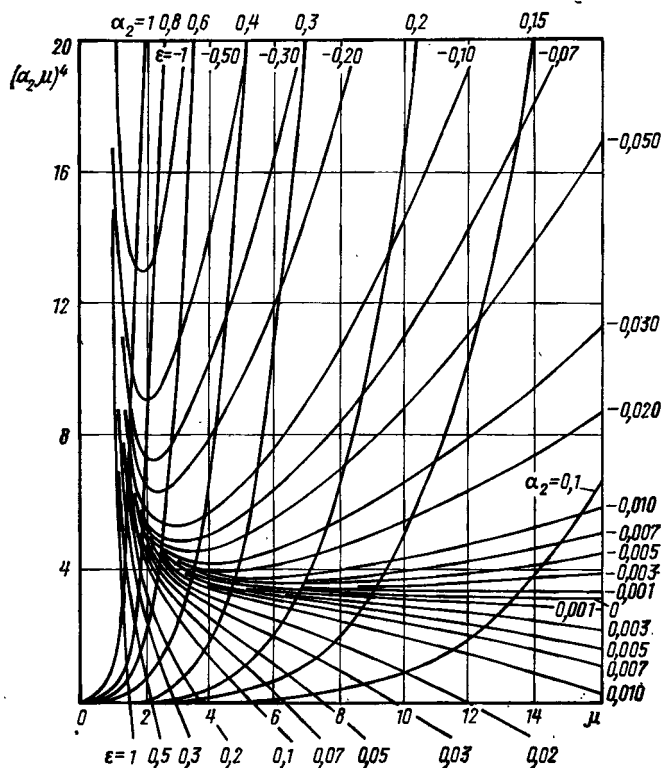


Рис. 11.2 Номограмма решения уравнения (2.8).

При значениях $\mu \gg 1$ можно получить простые приближенные формулы для q_2 . Опуская в уравнении (2.8) величины порядка $(\mu - 1)^{-1}$ в сравнении с единицей, находим

$$\mu = \frac{\sqrt{\theta}}{\alpha_2}, \quad (2.10)$$

где

$$\theta = -R_c + \sqrt{R_c^2 + 3}. \quad (2.11)$$

Подставляя μ согласно (2.10) в выражение (2.6), получаем

$$q_2 = \frac{1}{2(\chi\sqrt{\theta} - 1)} \left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2R_c \right). \quad (2.12)$$

Для оболочек средней длины эту формулу можно еще упростить, полагив $\chi \gg 1$. В этом случае

$$q_2 = \frac{1}{2\chi\sqrt{\theta}} \left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2R_c \right). \quad (2.13)$$

При $R_c = 0$ отсюда следует формула Саутуэлла — Папковича

$$q_2 = 0,877/\chi. \quad (2.14)$$

Таким образом, формула (2.12) является обобщением формулы Саутуэлла — Папковича на случай совместного действия внешнего давления и продольных усилий, а также на случай коротких оболочек. Количество волн по окружности определяется согласно (2.5), (2.10) выражением

$$n^2 = \frac{1}{\omega} \left(\sqrt{\theta} - \frac{1}{\chi} \right), \quad \omega = \frac{\sqrt{h/R}}{\sqrt{12(1-\nu^2)} \lambda_1}. \quad (2.15)$$

Согласно этому выражению растягивающее продольное усилие увеличивает число волн по окружности, а сжимающее — уменьшает. При этом чем короче оболочка, тем больше волн образуется по окружности.

На рис. 11.3 приведены значения критических усилий, подсчитанных по формулам (2.6), (2.12). Сплошные линии соответствуют формуле (2.6), пунктирные — (2.12). Прямой линией нанесены значения, подсчитанные по формуле Саутуэлла — Папковича.

Из сравнения значений q_2 , подсчитанных по формулам (2.6) и (2.12), можно установить левую границу применимости формулы (2.12). Приблизительно эту границу определим выражениями:

$$\chi \geq -18,55\theta^2 + 59\theta - 39,35 \quad (2.16)$$

при положительных значениях R_c и

$$\chi \geq 3,82\theta^2 - 21,7\theta + 33,14 \quad (2.17)$$

при отрицательных значениях R_c .

Правая граница применимости формулы (2.12), как будет показано ниже, дается оценкой

$$\chi \leq \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{R}{h} (0,516\theta - 0,956\sqrt{\theta} + 0,465). \quad (2.18)$$

Сравнение формул (2.12) и (2.13) дает возможность установить границы применимости формулы (2.13). Левая граница

с точностью $\sim 5\%$ устанавливается соотношением

$$\chi \geq \frac{20}{\sqrt{6}}, \quad (2.19)$$

правая граница по-прежнему дается оценкой (2.18).

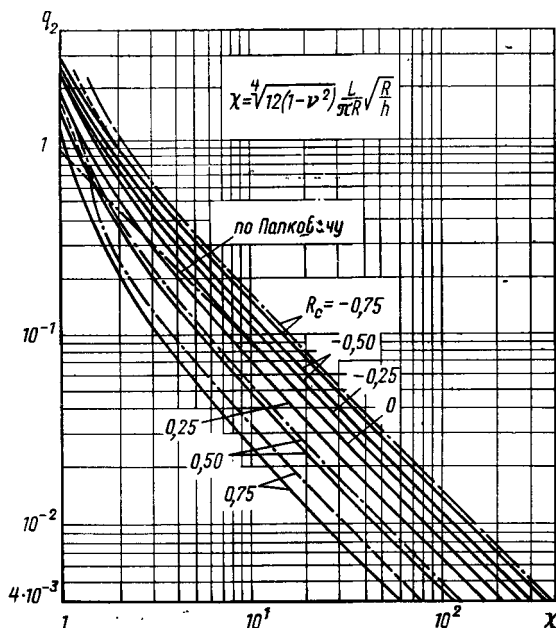


Рис. 11.3. Значения относительных критических величин внешнего давления и продольного усилия оболочек средней длины.

Сделаем одно замечание в связи с выводом и установившейся трактовкой формулы Саутуэлла — Папковича. Запишем выражение (2.6) в виде

$$2R_c = \frac{1}{1 + q^*(2\mu - 1)} \left[(\mu\alpha_2)^2 + \frac{1}{(\mu\alpha_2)^2} \right], \quad (2.20)$$

здесь

$$q^* = \frac{Rq}{N}. \quad (2.21)$$

Из условия минимума R_c получим уравнение для определения μ

$$(\alpha_2\mu)^4 = 3 + \frac{2}{\mu \frac{q^*}{q^* - 1} - 1}. \quad (2.22)$$

При $q^* = 1$ из равенства (2.20), (2.22) следует формула Саутуэлла — Папковича. Таким образом эта формула соответствует случаю двухосного сжатия равными усилиями, а не простому кольцевому сжатию, как это обычно трактуют. Это замечание, как видно из рис. 11.3, для достаточно длинных оболочек несколько не умаляет значения важной и оправдавшей себя на практике формулы Саутуэлла — Папковича. Однако для коротких оболочек погрешность может быть значительной, и это надо иметь в виду, так как границы применимости этой формулы до сих пор четко не были установлены.

При условии

$$\mu \frac{q^*}{q^* - 1} \gg 1$$

в правой части уравнения (2.22) можно пренебречь вторым слагаемым. В этом случае

$$\mu = \frac{\sqrt[4]{3}}{\alpha_2}. \quad (2.23)$$

Подставив найденное значение в выражение (2.20), получим еще одну формулу для q_2

$$q_2 = \frac{(2/\sqrt{3}) - R_c}{\sqrt[4]{3} \chi - 1}, \quad (2.24)$$

которая тождественна формуле

$$q_2 = \frac{2}{\sqrt{3} \left(\frac{1}{q^*} + \sqrt[4]{3} \chi - 1 \right)}, \quad (2.25)$$

приведенной в монографии [2.7].

На рис. 11.3 значения q_2 , соответствующие формуле (2.24), нанесены штрихпунктиром. Из этого рисунка видно, что формула (2.24) имеет более узкий диапазон применимости, чем формула (2.12). Формулы (2.12), (2.24) можно записать еще и в следующем виде:

$$R_q = \frac{q}{q_0} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt[4]{3} \chi - 1}{\sqrt[4]{6} \chi - 1} \left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2R_c \right), \quad (2.12')$$

$$R_q = 1 - 0,866R_c, \quad (2.24')$$

где q_0 — значение q при $R_c = 0$.

На рис. 11.4 дано другое, более удобное для практического использования, графическое представление формулы (2.6). Прямой линией нанесены значения R_q согласно формуле (2.24). Ве-

линиины R_q , соответствующие формуле (2.12), здесь не показаны, так как они для широкого диапазона значений параметров χ и

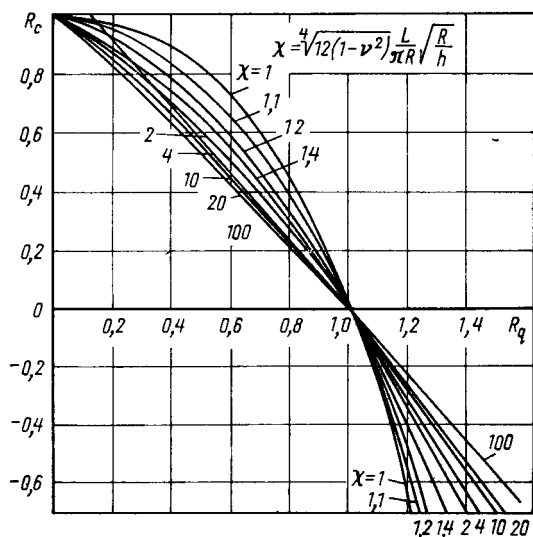


Рис. 11.4 Значения относительных критических величин внешнего давления оболочек средней длины.

R_c практически совпадают со значениями, вычисленными по формуле (2.6).

Длинные оболочки. Из уравнения (1.5) гл. VI получаем

$$\frac{qR}{Eh} = \lambda^2 \left[\frac{T_1^0}{Eh} \frac{n^2 + 1}{n^2(n^2 - 1)} + \frac{\lambda^2}{n^2(n^2 - 1)} + \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2} \frac{n^2 - 1}{\lambda^2} \right]. \quad (2.26)$$

Введя обозначения:

$$q_3 = 3 \frac{q}{q_b}, \quad q_0 = 3 \frac{D}{R^3}, \quad \omega_m = \frac{1}{\lambda} \sqrt[4]{\frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2}}, \quad (2.27)$$

преобразуем (2.26)

$$q_3 = \frac{1}{\omega_m^2 n^2} \left[\omega_m^2 (n^2 - 1) n^2 + \frac{1}{\omega_m^2 n^2 (n^2 - 1)} - 2R_c \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right]. \quad (2.28)$$

Для бесконечно длинных оболочек отсюда следует формула Грасгофа — Бресса (при этом по окружности образуются две ($n = 2$) волны)

$$q_3 = 3, \quad q_0 = 3 \frac{D}{R^3}. \quad (2.29)$$

Для больших значений n в выражении (2.28) можно пренебречь единицей в сравнении n^2 . В этом случае

$$q_3 = \frac{1}{\omega_m^2 n^2} \left[\omega_m^2 n^4 + \frac{1}{\omega_m^2 n^4} - 2R_c \right]. \quad (2.30)$$

Рассматривая n как непрерывно изменяющуюся величину, из условия минимума q_3 по n находим

$$n^2 = \sqrt{\theta} / \omega_m. \quad (2.31)$$

Подставив это значение в равенство (2.30), получаем

$$q_3 = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\theta}} \left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2R_c \right). \quad (2.32)$$

Эта формула при $m = 1$, $\omega_m = \omega$ тождественна формуле (2.13). При $R_c = 0$ из формулы (2.32) следует другой вариант записи формулы Саутуэлла — Папковича

$$q_3 = \frac{1,754}{\omega}. \quad (2.33)$$

При небольшом числе волн по окружности величину n нельзя рассматривать как непрерывно изменяющуюся. В этом случае необходимо использовать формулу (2.28), в которой n , m (целые числа) подбираются из условия минимума q_3 . Зависимость $q_3 = q_3(\omega)$ представлена на рис. 11.5. Сплошные линии соответствуют формуле (2.28), пунктирные — формуле (2.32). Видно, что формула (2.32) применима для не слишком длинных оболочек. Правую границу применимости этой формулы можно приближенно определить выражением

$$\omega \leq 0,516 \theta - 0,956 \sqrt{\theta} + 0,465, \quad (2.34)$$

полученным из сравнения подсчитанных по формулам (2.28) и (2.32) значений q_3 . Выше эта граница записана в несколько ином виде. Левая граница применимости формулы (2.32) была установлена оценкой (2.19).

В заключение рассмотрим случай общей потери устойчивости оболочки как длинной трубки ($n = 1$). Этот случай в теории оболочек особый. В характеристическом уравнении (1.5) гл. VI при $n = 1$ пропадают главные члены и начинают играть роль малые члены. Осевое усилие в этом случае связано с окружным усилием простой формулой

$$N = N_c - 1/2 T_2^0, \quad N_c = \pi R E h / L, \quad (2.35)$$

где N_c — эйлерово критическое усилие сжатия. Из этой формулы видно, что внутреннее давление ($T_2^0 = PR$) понижает устойчивость оболочки. Внешнее же давление ($T_2^0 = -qR$) оказывает

стабилизирующее действие. В случае совместного действия осевых усилий и всестороннего внешнего давления в формуле (2.35) следует заменить N на $N + 1/2 q R$. В этом случае давление

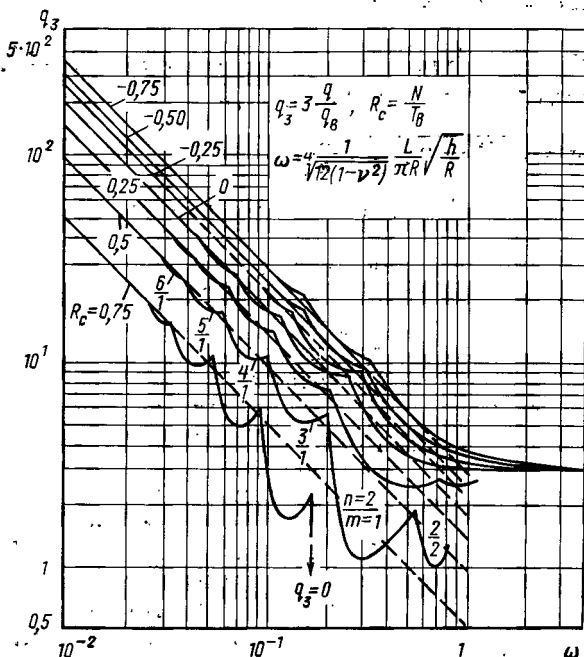


Рис. 11.5 Значения относительных критических величин внешнего давления и продольного усилия длинных оболочек.

на торцы оболочки компенсирует давление на боковую поверхность, так что $N = N_0$ — всестороннее давление — не влияет на устойчивость оболочки. При отсутствии осевого сжатия

$$PR = 2N_0. \quad (2.36)$$

Отсюда следует, что длинная трубка может потерять устойчивость под действием внутреннего давления. Внешнее же давление не может вызвать потери устойчивости. Рассмотренный случай имеет практическое значение в нефтяном хозяйстве при расчете обсадных труб и буровых колонн.

Устойчивость моментных форм равновесия. Для исследования влияния моментности исходного состояния и граничных условий используем конечно-разностный алгоритм (гл. VI). Поместим начало продольной координаты в середине оболочки. Прогиб исходного состояния имеет вид (1.4) гл. X.

Для достаточно длинных оболочек можно рассмотреть половину оболочки. В этом случае функции, входящие в решение гл. VI, и параметр нагрузки имеют вид

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e^{-b_1\eta}(\cos b_2\eta + \alpha_3 \sin b_2\eta), \\ f_2 &= -2e^{-b_1\eta}\alpha_4[(1 + \alpha_2\alpha_3)\sin b_2\eta + (\alpha_2 - \alpha_3)\cos b_2\eta], \\ \alpha_4 &= \psi_1\psi_2, \quad t_1 = k_t = \nu N^* + P^*/2, \\ P^* &= \sqrt{12(1 - \nu^2)} \frac{P}{E} \left(\frac{R}{h}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

При заземлении оболочки $\alpha_3 = \alpha_1$, при свободном опирании $\alpha_3 = \alpha_1$.

Кривая взаимодействия внешнего давления и осевых сжимающих усилий для заземленной оболочки средней длины ($\eta_m = 30$) показана на рис. 11.6. Нагрузки отнесены к их классическим значениям.

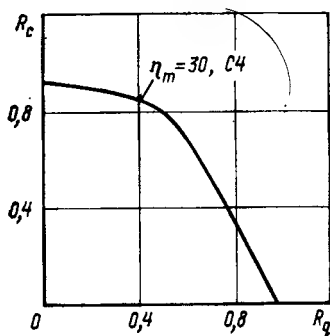


Рис. 11.6. Значения относительных критических величин усилия сжатия и внешнего давления заземленной оболочки.

Нелинейная задача. Нелинейные решения были получены С. В. Александровским, Л. Р. Исправниковым, В. П. Агамировым, О. И. Теребушко, О. Н. Ленько, К. А. Родителевым, А. А. Буштырковым (см. [5.1]). Все эти решения имеют приближенный характер, так как форма прогибов в них выбиралась с малым числом варьируемых параметров. Результаты вычислений даны таблично и графиками. В работе О. И. Теребушко [11.14] для границы устойчивости рекомендуется зависимость (2.1), в которой вместо верхних критических напряжений σ_v , q_v используются нижние критические значения.

Эксперименты. Результаты экспериментов показаны на рис. 11.7 и 11.8. На рис. 11.7 областью I показаны данные экспериментов на майларовых оболочках, полученные в работе [11.26]. Для них хорошей нижней границей служит окружность единичного радиуса

$$R_c^2 + R_q^2 = 1, \quad (2.38)$$

при этом

$$\begin{aligned} R_c &= \sigma/k_c\sigma_v, \quad R_q = q/0.9q_v, \\ k_c &= 1 - 0.9\left(1 - e^{-\frac{1}{16}\sqrt{\frac{R}{h}}}\right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для результатов В. П. Агамирова и Л. Р. Исправникова эта граница дает завышенные значения особенно при малых R_q .

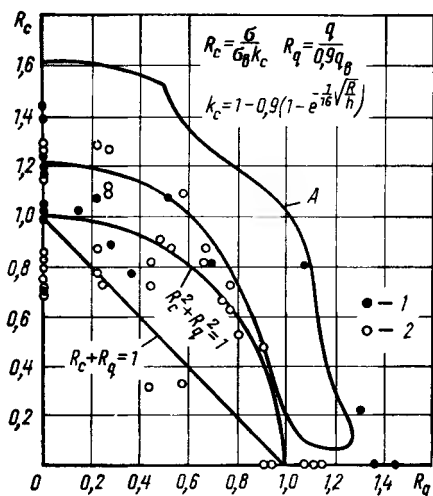


Рис. 11.7. Экспериментальные значения относительных критических величин усилия сжатия и внешнего давления.

1—Исправников Л. Р., 2—Агамиров В. П.,
А—Карпан А. и др. [11.26].

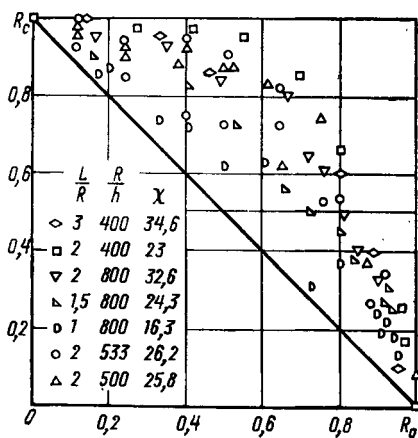


Рис. 11.8. Экспериментальные значения относительных критических величин усилия сжатия и внешнего давления.

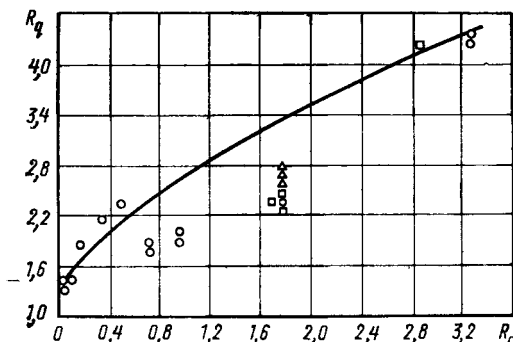


Рис. 11.9. Экспериментальные и расчетные значения относительных критических величин усилия растяжения и внешнего давления.

поэтому надежнее пользоваться прямой (2.1). В практических расчетах для оболочек с начальными неправильностями порядка толщины, вероятно, следует использовать эту оценку, причем

величину σ_b брать из полуэмпирических кривых, полученных для осевого сжатия.

На рис. 11.8 показаны результаты эксперимента Вейнгартена и Сейда [11.30], полученные на майларовых и стальных оболочках. На рис. 11.9 показаны результаты эксперимента Л. И. Маневича и В. З. Грищака [11.4], в котором испытывались при внешнем давлении и растяжении оболочки из мягкой полунатянутой и нагартванной сталей марки Х18Н9. Оболочки имели размеры: $R/h = 600$, $L/R = 2,2$, $h \approx 0,098$ мм. Граничные условия соответствовали жесткому защемлению. Сплошной линией нанесены расчетные значения по формуле (2.13), полученной В. В. Кабановым [11.7]. Усилия и давление отнесены к их верхним критическим значениям по формулам Лоренца — Тимошенко и Саутуэлла — Папковича. Из рис. 11.9 видно, что формула (2.13) дает хорошее приближение к экспериментальным результатам до $R_c = 0,5$. Дальше, по мере приближения интенсивности напряжений к пределу пропорциональности, экспериментальные значения критического давления резко снижаются, а затем снова возрастают, приближаясь к расчетным, что, по-видимому, можно объяснить нагартровкой материала оболочки.

§ 3. Кручение с растяжением, сжатием

Линейная задача. Решение задачи устойчивости безмоментного исходного состояния получим аналогично тому, как это было проделано в § 4 гл. X для случая кручения с внутренним давлением. Вместо уравнений (4.1) гл. X в этом случае имеем

$$2S^0 = \frac{1}{\lambda_m n} \left(k_2^2 D n^4 + E h \frac{\lambda_m^4}{n^4} + T_1^0 \lambda_m^2 \right), \quad (3.1)$$

$$2S^0 = \frac{1}{\lambda_{m+2} n} \left(k_2^2 D n^4 + E h \frac{\lambda_{m+2}^4}{n^4} + T_1^0 \lambda_{m+2}^2 \right).$$

Обозначив

$$a_2 = a - 2N^* a^{1/2}, \quad N^* = -\frac{T_1^0}{T_B}, \quad T_B = \frac{E h^2}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (3.2)$$

соответственно (4.3) — (4.7) гл. X получаем

$$3f^2 + f - a_2 = 0, \quad (3.3)$$

$$f = 1/6 (\sqrt{1 + 12a_2} - 1), \quad (3.4)$$

$$b = 1/2 (\sqrt{1 + 4f} - 1),$$

$$2S^0 = \frac{(a + b^4 - 2N^* a^{1/2} b^2) E h}{b n^5} \lambda_{m+2}^3, \quad (3.5)$$

$$\lambda_s = \frac{2S^0}{\lambda_2^{1/2} (k_2^2 D)^{5/8} (Eh)^{3/8}} = b^{-1} a^{3/8} + b^3 a^{-5/8} - 2N^* a^{-1/8}, \quad (3.6)$$

$$b(1+4f)^{1/2}(1+12a_2)^{1/2}(3a-5b^4+2N^*a^{1/2}b^3) + \\ + 8a(3b^4-a-4b^3a^{1/2}N^*)(1+N^*a^{-1/2})=0. \quad (3.7)$$

Решение уравнения (3.7) показано на рис. 11.10. Этот график вместе с формулами (3.4) — (3.6) позволяет вычислить критическое усилие сдвига. При $N^* = 0$ из полученного решения следует решение для чистого кручения. Зависимость $R_t = (S^0/S_K) = \lambda_s/2,81$ отношения критического усилия сдвига к верхнему критическому усилию при чистом кручении от отношения $R_c = N^* = N/T_v$ показана на рис. 11.10. Эта зависимость хорошо аппроксимируется формулой

$$R_t = 1 - 0,678 R_c \quad (3.8)$$

в диапазоне $0 > R_c > -1$. Эта же задача рассматривалась Батдорфом, Штейном и Шилькроутом [11.18], Доннеллом [11.21] и др. Для случая осевого сжатия и кручения Доннелл рекомендует зависимость

$$R_t^3 + R_c = 1, \quad (3.9)$$

где $R_t = \tau/\tau_v$, $R_c = \sigma/\sigma_v$, τ_v и σ_v берутся из экспериментов. В работе [11.18] рекомендовано

$$R_t^2 + R_c = 1. \quad (3.10)$$

Эта оценка применима при $Z < 1$ для случая свободного опирания и при $Z < 5$ для случая защемления, если за σ_v и τ_v брать теоретические значения. Если же за σ_v , τ_v брать эмпирические значения, то соответственно

$$1 < Z < 7,7 (R/h)^2, \quad 5 < Z < 7,7 (R/h)^2. \quad (3.11)$$

Для случая растяжения и кручения рекомендуется формула

$$0,8R_c + R_t = 0,9 \quad (3.12)$$

при

$$-1 < R_c < 0, \quad 30 < Z < 7,7 (R/h)^2. \quad (3.13)$$

В работе [11.16] получено хорошее соответствие с экспериментом при

$$0,4R_c + R_t = 1. \quad (3.14)$$

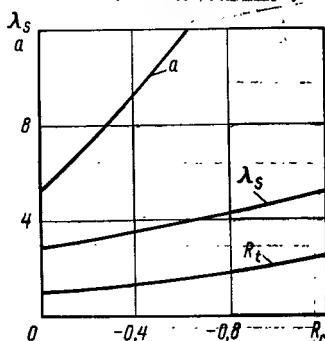


Рис 11.10. Значения относительных критических величин усилий сдвига и растяжения и решение уравнения (3.7) (кривая a)

Р. И. Кшнякин [11.9] для случая кручения и растяжения представил результаты расчета в виде единой кривой $F(R_c, R_t) = 0$. Для больших значений R_c эта кривая соответствует аналитическому выражению

$$2,1R_c^3 = R_t^4. \quad (3.15)$$

Здесь за σ_v , τ_v берутся верхние теоретические значения критических напряжений.

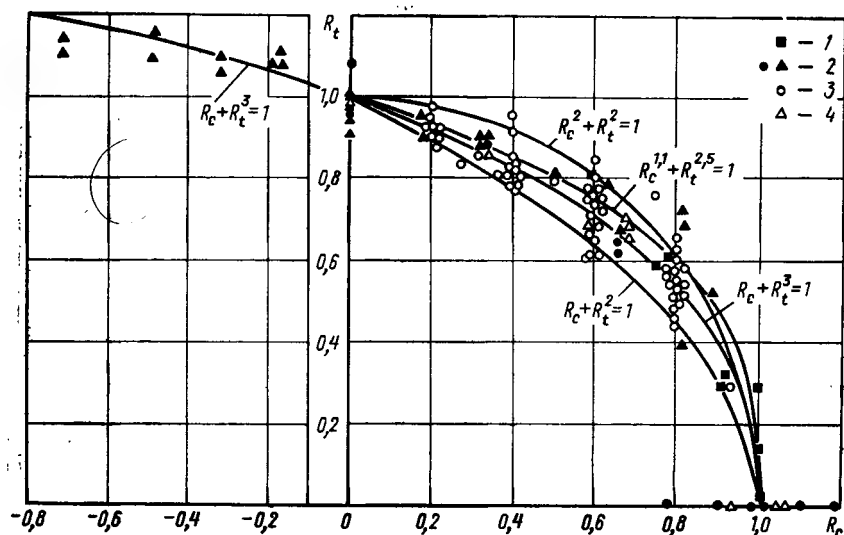


Рис. 11.11. Экспериментальные значения относительных критических величин усилия сдвига и продольного усилия.

1—Исправников Л. Р., 2—Harris L. A. и др. [11.25], 3—Bruhn E. F. [20.8], 4—Bridget F. J. и др. [11.19].

На рис. 11.11 представлены результаты для случая кручения с растяжением, сжатием. Для случая кручения с растяжением эксперимент лежит близко к кривой (3.9). Для случая сжатия и кручения нижней границей служит оценка (3.10). Верхние критические значения на рис. 11.11 взяты как средние эмпирические.

§ 4. Кручение и внешнее давление

Линейная задача устойчивости цилиндрической оболочки при действии кручения и внешнего давления рассматривалась В. М. Даревским [11.5], Н. И. Кривошеевым [11.8], Сьюером и Гаррисом [11.28], нелинейная — О. И. Теребушко [11.14]. Прибли-

женная зависимость, полученная Крейтом

$$R_t^2 + R_q = 1, \quad (4.1)$$

хорошо подтверждается расчетами Н. И. Кривошеева, Сьюера и Гарриса. Для линейной задачи О. И. Теребушко получил формулу

$$R_t^{3/2} + R_q^{5/4} = 1. \quad (4.2)$$

Результаты В. М. Даревского представлены в виде единой кривой $F(R_q, R_c) = 0$ и даны таблицей

R_q	1	0,95	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2	0
R_t	0	0,4	0,49	0,61	0,75	0,85	0,93	1

На рис. 11.12 представлены эксперименты Сьюера и Гарриса [11.28] (индекс B) и Экстрема [11.22] (индексы $H-C$).

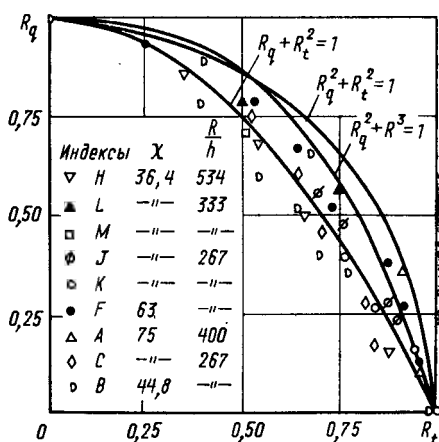


Рис 11.12 Экспериментальные значения относительных критических величин усилия сдвига и внешнего давления

В выражениях R_t, R_q верхние значения τ_b, q_b взяты как средние из эксперимента. В практических расчетах можно использовать оценку (4.1). При этом следует ввести поправочный коэффициент к τ_b, q_b , равный примерно 0,85, или взять τ_b, q_b из эмпирических данных.

§ 5. Случай трех нагрузок

Задачи устойчивости оболочки при совместном действии трех однородных нагрузок рассматривались в работах [11.14, 11.25, 11.29]. О. И. Теребушко [11.14] рассмотрел случай совместного действия кручения, сжатия и внешнего поперечного давления. Для верхней и нижней поверхностей устойчивости рекомендованы зависимости

$$R_c + R_q^{5/4} + R_t^{3/2} = 1, \quad (5.1)$$

$$R_{сн} + R_{qn} + R_{tn} = 1. \quad (5.2)$$

Вейнгартен [11.29] рассмотрел задачу при кручении, растяжении, внутреннем давлении и получил приближенную формулу

$$R_t^2 = (1 + R_c)(1 + R_p), \quad (5.3)$$

где τ_b подсчитывалось из детерминанта высокого порядка для случая $P = 0$; σ_b , q_b берутся согласно формулам Лоренца — Тимошенко и Саутуэлла — Папковича. Расчеты подтверждают эту формулу с точностью до 3%. Для нижней границы в формуле рекомендовано брать $0,84 \tau_b$ вместо τ_b .

Гаррис и др. [11.25] испытывали оболочки при кручении, сжатии и внутреннем давлении. Для двух значений параметра давления $P = PR^2/Eh^2$ было замечено, что можно пользоваться зависимостью $R_c + R_t = 1$, полученной для случая кручения и сжатия.

В работе [11.29] испытывались оболочки из майлара при совместном действии кручения, растяжения и внутреннего давления. Результаты для оболочек с $R/h = 400$, $L/R = 2$ согласуются с формулой (5.3).

Г л а в а XII

ИЗГИБ МОМЕНТОМ ОБОЛОЧКИ С ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Рассмотрим задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки при неоднородных исходных состояниях, вызванных действием неоднородных нагрузок: локальные нагрузки, нагрузки, распределенные по части поверхности или по линиям, краевые радиальные и моментные нагрузки. Исходное состояние оболочек при неоднородном нагружении всегда неоднородно. Его компоненты (усилия, смещения) зависят от координат срединной поверхности. Неоднородность исходного состояния в этом случае вызывается не только влиянием граничных условий, но и самой неоднородностью нагрузки.

Решение задач устойчивости при неоднородных напряженно-деформированных состояниях имеет некоторые специфические особенности. С начала неоднородного нагружения элементы оболочек в той или иной мере начинают изгибаться. Волокна материала оболочки находятся в разных условиях сжатия, а некоторые из них находятся в зоне растяжения и оказывают поддерживающее влияние. В связи с этим при решении задач возникает ряд новых вопросов.

Наиболее важным является вопрос о влиянии неоднородности мембранных напряжений на критическое значение их амплитудной величины. Другими словами — вопрос о том, насколько неоднородность основных, вызывающих потерю устойчивости, напряжений изменяет критическое значение их амплитуды по сравнению с критическим значением однородного напряжения.

Другой важный вопрос — это влияние моментности исходного состояния, которое сказывается в появлении сопутствующих основным дополнительных напряжений в срединной поверхности и местных искривлений элементов оболочек. Дополнительные сжимающие напряжения понижают устойчивость оболочек. Местные же искривления могут оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние.

Неоднородность исходного состояния приводит к локализации формы потери устойчивости. Она зависит как от неоднородности основных напряжений, так и от степени моментности исходного состояния и не описывается простейшими функциями типа синуса или косинуса, которые используются при однородных напряжениях.

Такова физическая сторона задачи. В математическом отношении неоднородность напряжений приводит к системе уравнений устойчивости с переменными коэффициентами. Получить точное аналитическое решение этих уравнений не представляется возможным. При решении задачи в рядах появляется нелинейность по отыскиваемому критическому напряжению. Нелинейность появляется и при учете моментности исходного состояния. Все эти трудности требуют новых подходов к решению задач, требуют разработки численных методов расчета и соответствующих машинных алгоритмов.

Постановки задач устойчивости оболочек при неоднородных исходных состояниях были даны в работах Флюгге [5.4]. Им были получены и первые приближенные решения некоторых задач без учета искривлений элементов оболочек в исходном состоянии. С учетом искривлений элементов первые решения были получены в работах Альброта, Браша [16.10] и Фишера [10.6]. В работе Л. И. Балабуха и Н. А. Алфутова [6.1] развит подход, не требующий предварительного определения исходного напряженно-деформированного состояния.

До последнего времени не удавалось преодолеть трудностей, связанных с решением уравнений устойчивости оболочек с переменными коэффициентами. И только в последние годы в связи с интенсивным внедрением ЭВМ в этом вопросе наметился определенный прогресс. В значительной мере этому способствовали работы В. И. Мяченкова, Ю. В. Липовцева, В. В. Кабанова, Л. В. Андреева, Хуана, Альмрота, Бушнелла и др.

§ 1. Чистый изгиб

Рассмотрим оболочку, нагруженную по краям изгибающими моментами (рис. 12.1). Исследование задачи устойчивости таким

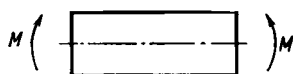


Рис. 12.1. Круговая цилиндрическая оболочка при изгибе моментом.

образом нагруженной оболочки развивалось по двум направлениям.

1. Задача Дубяги — Кармана — Бразье

Началом первому направлению послужили эксперименты Бантлина (1910) с трубами, их теоретический анализ, выполненный К. М. Дубягой [12.1] (1909) и Лоренцем (1910) (см. [5.1]), и решение Кармана [12.8] (1911) задачи изгиба трубы, в котором учитывалось сплющивание поперечного сечения, принятое постоянным по всей длине трубы. Бразье в 1927 г. [12.5] в такой постановке исследовал большие перемещения трубы и определил предельный момент, при котором наступает неограниченный рост кривизны образующих

$$M = 0,99 \frac{Eh^2R}{1 - \nu^2}. \quad (1.1)$$

При этом в предположении недеформируемости поперечного сечения

$$\sigma_n = \frac{M}{\pi h R^2}, \quad k_b = \frac{\sigma_n}{\sigma_s} = 0,545. \quad (1.2)$$

В решении Бразье, полученном энергетическим путем, дополнительно принималось допущение о нерастяжимости средней линии поперечного сечения. Считалось также, что продольные волокна испытывают только деформации удлинений.

Позже задача Дубяги — Кармана — Бразье рассматривалась в ряде работ, уточнивших коэффициент k_b . Хвалла [12.6] (1933) получил $k_b = 0,625$, Ю. В. Коновалов [12.2a] (1940) — $k_b = 0,67$ и т. д. Из решения [12.2a] результат Бразье получается как пер-

вое приближение. Он соответствует малым деформациям и дает заниженное значение критического момента.

В дальнейшем решения были получены Рейсснером [12.12] (1961). При этом граничные условия на краях, как и прежде, не учитывались. В работе Яо [12.16] (1962), решение построено с учетом локальной оваллизации, которая обычно наблюдается в экспериментах с длинными трубками из материала с низким модулем упругости. Результаты исследования даны графиком $k_b = k_b(R/h)$, согласно которому потеря устойчивости оболочки, связанная с локальной оваллизацией, возможна при относительно небольших значениях $R/h \leq 50$. При больших значениях R/h потеря устойчивости связана с образованием малых локальных выпучин, характерных для задачи осевого сжатия.

Рассмотренный вид потери устойчивости в процессе нелинейного изгиба, когда поперечные сечения сплющиваются от действия осевых сил в продольных искривленных волокнах, характерен для сравнительно толстых труб из материала с низким модулем упругости или для труб, работающих за пределом упругости.

2. Линейная задача. Классическая постановка

Тонкие упругие оболочки средней длины обычно теряют устойчивость с образованием мелких вмятин, как и в случае осевого сжатия. Однако при изгибе вмятины образуются в основном в сжатой зоне. Поэтому для описания такой неоднородной формы потери устойчивости приходится использовать ряды по окружной координате. Исследование такого рода составили второе направление. Рассмотрим свободно опертую по краям оболочку. Исходное состояние считаем безмоментным. Единственным отличным от нуля усилием будет продольное усилие, которое изменяется по окружности и постоянно по длине

$$T_1^0 = -A_0 \cos \varphi, \quad A_0 = \frac{M}{\pi R^2 h}. \quad (1.3)$$

Для исследования задачи используем алгоритм решения в рядах, описанный в гл. VI. Прогиб задается одинарным рядом

$$w = \sin \lambda \xi \sum C_n \cos n\varphi. \quad (1.4)$$

Система алгебраических уравнений имеет вид

$$(1 + \delta_{n,0}) \pi \alpha_n T_0 C_n + 2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_0^{\pi} T_1^0 [\cos(k+n)\varphi + \cos(k-n)\varphi] d\varphi = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (1.5)$$

$$\alpha_n = q_1 + \frac{1}{q_1}, \quad q_1 = \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} \alpha_0^2, \quad \alpha_0^2 = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)} R}, \quad (1.6)$$

или в матричной форме

$$(A - \tilde{\lambda}I)C = 0, \quad (1.7)$$

при этом

$$A = \begin{bmatrix} \beta_{nk} \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad C = [C_n], \quad I = [1], \quad \tilde{\lambda} = T_B/A_0, \quad (1.8)$$

$$\beta_{0k} = \delta_{k,1}, \quad \beta_{nk} = \delta_{k+n,1} + \delta_{|k-n|,1}.$$

Величина $\tilde{\lambda}$ находится как наибольшее собственное число матрицы A , которая имеет двухленточное строение. При этом необходимо производить минимизацию по параметру $\tilde{\lambda}$. Резуль-

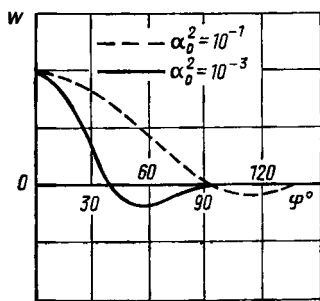


Рис. 12.2. Форма потери устойчивости оболочки при изгибе моментом

таты вычислений по ЭВМ, выполненные методом степенной итерации [14.2], показаны на рис. 12.3 кривой «линейная теория». При этом $k_B = A_0/T_B$ — отношение амплитуды усилия к критическому усилию однородного сжатия. Эта величина отличается от единицы только при малых значениях R/h , т. е. в случае относительно толстых оболочек. Таким образом, можно считать, что амплитуда осевого критического усилия при изгибе моментом близка к критическому однородному усилию. Физически это можно объяснить локальностью формы потери устойчивости — изменение усилий в пределах

вмятины незначительно. Форма потери устойчивости на половине развертки оболочки показана на рис. 12.2. Изложенная постановка линейной задачи устойчивости при изгибе моментом принадлежит Флюгге [5.4].

Детальное исследование задачи дано в работах [12.13, 14.2], в которых вычисления собственных чисел и соответствующих им векторов бесконечных систем алгебраических уравнений произведены на ЭЦВМ.

3. Учет сплющивания

В некоторых работах (см. [5.1]) объединены два указанных направления в исследовании устойчивости оболочки при изгибе моментом. Критическое состояние оболочки определяется моментом появления локальных вмятин на деформированной докритическим изгибом оболочке. Докритическое состояние определяется нелинейным решением, так что критическая нагрузка соответствует точке бифуркации этого решения. Рассмотрены как бесконечно длинная оболочка, так и оболочка конечной длины.

Критические напряжения приближенно определяются из условия равенства амплитуды докритических напряжений верхнему критическому напряжению однородного сжатия оболочки с радиусом, равным наибольшему радиусу кривизны сплюсненного докритическим изгибом поперечного сечения. Это допущение обусловлено локальностью выпучивания. Влияние сплющивания в исходном состоянии оказывается существенным для длинных оболочек. При $\omega \geq 0,65$ величина $k_b = 0,494$. Для коротких оболочек и оболочек средней длины это влияние невелико: $k_b = 1 \div 0,87$ при $\omega = 0 \div 0,0915$. Отмечается, что потеря устойчивости по Бразье, когда момент изгиба достигает максимума, практически не реализуется, раньше наступает местная потеря устойчивости.

4. Нелинейная задача

Нелинейная задача потери устойчивости оболочки по коротким продольным волнам рассматривалась Ю. А. Шевляковым и Л. И. Маневичем [12.4]. Использовался метод Ритца — Папковича. Функция прогиба выбиралась в виде

$$w = ah (\cos \lambda \xi \cos n\varphi + a_1 \cos 2\lambda \xi + a_2 \cos 2n\varphi) \cos^2 \varphi. \quad (1.9)$$

В отличие от функции, использованной для случая сжатия, здесь введен множитель, учитывающий затухание прогибов к нейтральному диаметру. Рассматривалась половина оболочки, в которой действуют сжимающие напряжения. Граничные условия по нейтральному диаметру, соответствуют условию жесткого защемления. Отношение нижней критической амплитуды к критическому усилию однородного сжатия $k_{вн} = 0,426$. Исследован также случай, когда по линии сопряжения сжатой и растянутой зон имеет место упругое защемление. При этом величина $k_{вн}$ равнялась 0,398.

5. Эксперименты

Эксперименты были проведены в работах [7.23, 12.7, 12.10, 12.11, 12.14]. Потеря устойчивости оболочек средней длины при изгибе моментом, как и при сжатии, происходит хлопком. Выпучины имеют ромбовидную форму с затухающей амплитудой к зоне растягивающих напряжений. Однако, в отличие от осевого сжатия, до потери устойчивости имеет место оваллизация поперечных сечений. Наибольшую деформацию приобретает среднее по длине сечение.

Сравнение теории и эксперимента для оболочек средней длины представлено на рис. 12.3. Часть экспериментов представлена точками, часть — областями точек 1, 2, 3. Результаты

линейной теории нанесены согласно работе [14.2], нелинейной — [14.8]. В эксперименте наблюдается та же закономерность, что и в случае осевого сжатия: уменьшение коэффициента k_b с увеличением R/h , большой разброс, хотя в целом величина k_b больше k_c в среднем на 28—30%. Причины разброса и несоответствия с теорией те же, что и в случае осевого сжатия. Можно, однако,

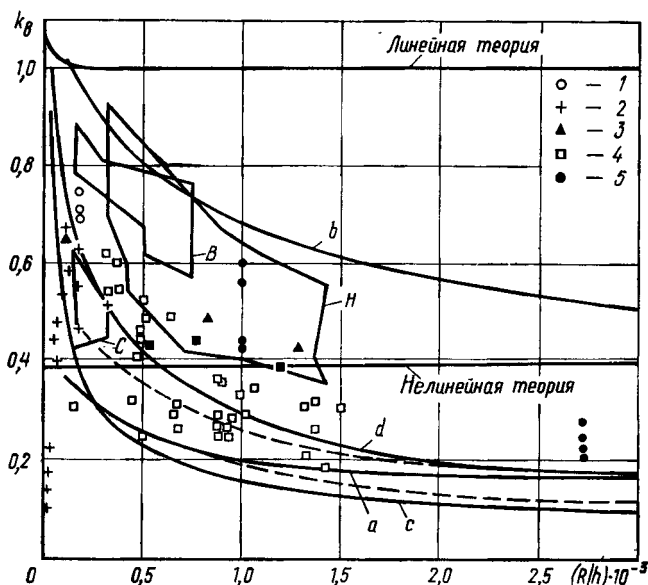


Рис. 12.3. Экспериментальные значения относительных амплитуд сжимающих напряжений при изгибе оболочки моментом.

1.—Бурдин П. Г., 2—Вергстром, 3—Mossman R. W., Robinson R. G. [12.11], 4—Donnel L. H. [7.23], 5—Suer H. S. и др. [12.14], H—Lundquist E. E. [12.10], B—Peterson J. P. [5.1], C—Imperial E. F. [12.7].

ожидать, что влияние начальных несовершенств и нелинейности в этом случае будет меньше. Этим, вероятно, частично и объясняется превышение k_b над k_c .

На рис. 12.3 сплошными и пунктирными линиями нанесены полуэмпирические зависимости $k_b = k_b(R/h)$. Нижняя линия c взята из работы В. М. Кулакова [12.26]. Для больших значений эта формула является консервативной. Лучшую нижнюю границу дает зависимость a , полученная В. В. Кабановым из зависимости c введением второго слагаемого. Вообще, приведенные зависимости следуют из соответствующих зависимостей k_c , если последние умножить на коэффициент 1,28. Так построена кривая d и верхняя граница b . Пунктирными линиями нанесены эмпирические кривые, полученные статистической обработкой в ра-

боте [12.14]. Верхняя кривая соответствует 90% вероятности падения точек в вышележащую от нее область, нижняя — 99% вероятности.

В работе [11.16] на основе данных [12.14] рекомендовано

$$k_b = k_c f, \quad (1.10)$$

где k_c берется согласно (9.8) гл. VII. Функция f дана в следующей ниже таблице в зависимости от R/h :

R/h	300	500	1000	1500	2000	2500	3000
f	1,595	1,46	1,35	1,315	1,3	1,29	1,22

Для практических расчетов, как и в случае осевого сжатия, вероятно, можно рекомендовать кривую d для отлично изготовленных оболочек

$$k_b = 1,28 \left[1 - 0,9 \left(1 - e^{-\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{h}}} \right) \right] \quad (1.11)$$

и кривую a для оболочек с начальными неправильностями порядка толщины оболочки

$$k_b = 1,28 (3,87 \sqrt{h/R} + 10^{-3} \sqrt{R/h}). \quad (1.12)$$

Все экспериментальные точки на рис. 12.3, лежащие ниже кривой a , относятся либо к пластической потере устойчивости, либо к потере устойчивости оболочек с низким значением R/h .

§ 2. Влияние внутреннего давления

1. Линейная задача

При изгибе моментом оболочки, находящейся под действием внутреннего давления, в ней возникают безмоментные усилия

$$T_1^0 = -A_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} P R, \quad T_2^0 = P R. \quad (2.1)$$

Для исследования задачи можно использовать систему (1.7). В ней изменяется только коэффициент α_n , в который войдут добавки от постоянных составляющих усилий (2.1)

$$\alpha_n = q_1 + \frac{1}{q_1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{n^2}{\lambda^2} \right) \sqrt{12(1-\nu^2) \bar{P}}, \quad \bar{P} = \frac{P}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2. \quad (2.2)$$

Далее исследование может быть произведено так же, как и в § 1. Первые результаты по этой задаче, по-видимому, были

получены Е. Д. Плетниковой [12.3] (1949), которая в частных примерах установила поддерживающее влияние внутреннего давления. Это является особенностью задачи по сравнению с задачей устойчивости при сжатии и внутреннем давлении. Детальное исследование задачи содержится в работе Вейнгартена [12.15] (1962). На рис. 12.4 нанесена зависимость $R_B = R_B(\bar{P})$ для оболочки с $R/h = 100$. Исследование формы потери устойчивости

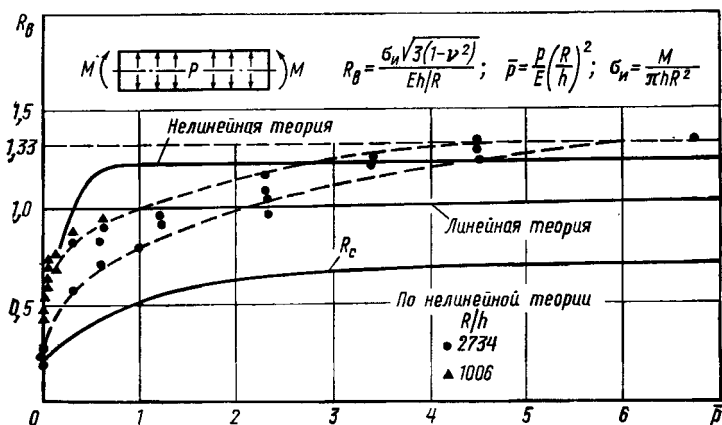


Рис. 12.4. Экспериментальные и расчетные значения относительных критических величин амплитуды сжимающих напряжений оболочки с внутренним давлением при изгибе моментом.

показывает, что вмятины располагаются в сжатой зоне. С увеличением давления вмятины удлиняются по дуге.

2. Нелинейная задача

Нелинейное решение задачи при изгибе моментом с внутренним давлением получено Лу и Нэшем [12.9]. Результат этого решения показан на рис. 12.4. В отличие от линейного решения наблюдается сильное поддерживающее влияние внутреннего давления. Особенно эффективно внутреннее давление при малых значениях параметра $\bar{P}$. При $\bar{P} > 1$ увеличение давления не приводит к росту критического усилия. Сравнение с нелинейным решением для случая сжатия (кривая R_c) показывает, что в случае изгиба поддерживающее влияние внутреннего давления проявляется сильнее. Однако это сравнение носит относительный характер, так как решения [10.4, 12.9] получены при различных функциях прогиба, причем решение Альмрота и Браща [10.4] точнее.

3. Эксперименты

На рис. 12.4 показаны экспериментальные данные при изгибе моментом, полученные в [12.14] на оболочках из нержавеющей стали. Как и в случае сжатия с внутренним давлением, с ростом $\bar{P}$ значения критических напряжений растут и особенно сильно при малых величинах $\bar{P}$. Предельным значением, по-видимому, является $\bar{P} = 1,33$. Однако экспериментальных данных недостаточно, чтобы делать какие-то окончательные выводы. Желательно получить дополнительные данные на разных материалах. Во всяком случае для практических расчетов оболочек с начальными неправильностями порядка h можно рекомендовать за нижнюю границу кривую R_c с поправочным коэффициентом, примерно равным 1,28.

В работе [11.16] на основе данных [12.14] приведена формула

$$R_b = k_b + 0,626 \bar{P}^{0,223}, \quad (2.3)$$

где k_b определяется по формуле (1.10).

Г л а в а XIII

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

§ 1. Изгиб силой. Линейная задача

Рассмотрим консольно закрепленную круговую цилиндрическую оболочку, имеющую на свободном крае жесткий шпангоут, к которому приложена поперечная сила Q (рис. 13.1). Задача

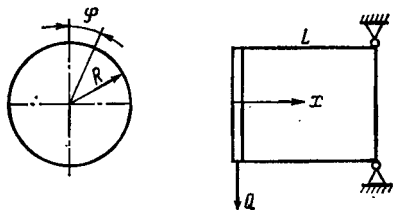


Рис 13.1. Круговая цилиндрическая оболочка при изгибе поперечной силой.

устойчивости такой оболочки имеет многочисленные приложения. Исходное состояние считаем безмоментным. Усилия этого состояния:

$$T_1^0 = S_0 \xi \cos \varphi, \quad S^0 = -S_0 \sin \varphi, \quad S_0 = Q/\pi R. \quad (1.1)$$

Для исследования задачи можно использовать систему (3.18) гл. VI:

$$(A - \tilde{\lambda}I)C = 0, \quad (1.2)$$

где

$$A = \left[\frac{\beta_{mn}^{ik}}{\alpha_{mn}} \right], \quad C = [C_{mn}], \quad I = [1], \quad \tilde{\lambda} = \frac{S_B}{S_0},$$

$$\alpha_{mn} = \frac{Dk_2^2}{2S_B} \frac{\lambda}{n} \left[\frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} + \frac{12(1 - \nu^2)R^2}{h^2} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right],$$

$$\beta_{mn}^{ik} = \frac{1 - (-1)^{i+m}}{\pi(1 + \delta_{n,0})^n} \frac{i}{i^2 - m^2} \left\{ (\delta_{k+n,1} + \delta_{|k-n|,1}) \times \right.$$

$$\times \frac{i}{i^2 - m^2} - [\delta_{k+n,1} + \delta_{|k-n|,1}(k-n)]k \left. \right\} \quad \text{при } i \neq m, \quad (1.3)$$

$$\beta_{mn}^{ik} = -\frac{\pi}{8(1 + \delta_{n,0})} \frac{m}{n} (\delta_{k+n,1} + \delta_{|k-n|,1}) \quad \text{при } i = m,$$

$$S_B = 0,787 \frac{Eh^2}{R} \left(\frac{hR}{L^2} \right)^{1/4},$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{при } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

$$(i, m = 1, 2, 3, \dots; \quad nk = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь S_B — критическое усилие при чистом кручении.

Задача отыскания критического значения амплитуды сдвигающего усилия S_0 заключается в определении наибольшего собственного числа $\tilde{\lambda}$ бесконечной матрицы A . Собственный вектор C матрицы A позволяет определить прогиб. Вычисление $\tilde{\lambda}$ удобно производить методом итераций. При этом бесконечную матрицу A необходимо заменять последовательностью усеченных матриц.

Как показывают эксперименты, при изгибе силой возможны два типа потери устойчивости. У длинных оболочек выпучивание происходит в зоне наибольших сжимающих усилий ($\varphi \approx \pi$, $x \approx L$). Волнообразование при этом сходно с волнообразованием при чистом изгибе, но имеет затухание по длине от места наибольших усилий T_1^0 . У коротких оболочек выпучивание начинается с боковых областей ($\varphi = \pi/2$), где действуют наибольшие сдвиги. Волнообразование при этом на половине оболочки ($0 \leq \varphi \leq \pi$) сходно с волнообразованием в случае чистого кручения, но имеет затухание к контуру. Влияние усилий T_1^0 при этом невелико. У оболочек средней длины выпучивание носит смешанный характер.

На рис. 13.2 приведены результаты расчетов коэффициентов k_d для различных L/R . При этом

$$k_d = \frac{\sigma_0}{\sigma_B}, \quad \sigma_0 = \frac{QL}{\pi R^2 h}, \quad \sigma_B = \frac{Eh}{\sqrt{3(1 - \nu^2)} R}, \quad (1.4)$$

где σ_0 — амплитуда сжимающего напряжения. Значения k_d были вычислены на ЭВМ методом итераций [6.11, 13.3] по описанному в гл. VI алгоритму выбора главных членов ряда. Максимальное

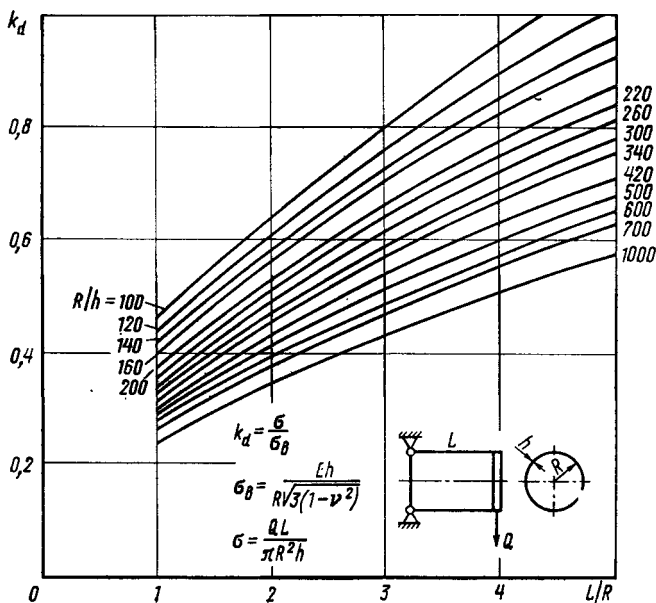


Рис. 13.2. Относительные значения амплитуды критических сжимающих напряжений при изгибе оболочки силой.

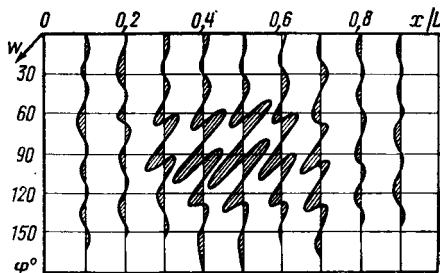


Рис. 13.3. Форма потери устойчивости оболочки при изгибе силой.

число членов ряда, необходимое для хорошей сходимости счета, равнялось 48. Эти члены ряда отбирались из 400 первых членов ряда Фурье (3.2) гл. VI. На рис. 13.3 показана форма потери устойчивости, вычисленная из матриц 48 порядка для оболочки

с $L/R = 1$, $R/h = 170$. Эпюры прогибов построены на развертке половины оболочки. Форма потери устойчивости носит сдвиговый характер. Винтовые складки такие же, как и при кручении, но с затуханием к контуру развертки.

§ 2. Приближенные оценки. Эксперименты

В работе В. М. Даревского [20.2] разработана приближенная методика оценки устойчивости оболочки, основанная на замене неоднородного напряженного состояния однородным и использовании известных линейных решений для случая сжатия и кручения. Критическая сила в этих оценках дается неравенством

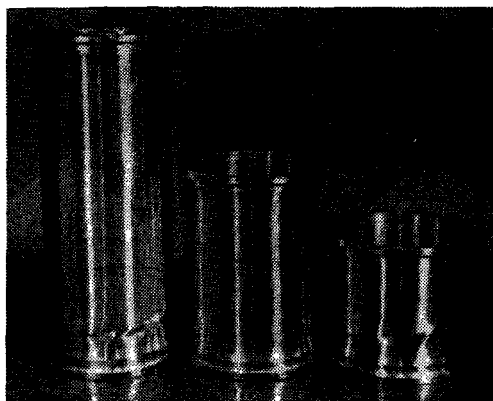


Рис. 13.4. Формы потери устойчивости оболочек при изгибе силой.

$Q_0 < Q < Q_6$. Величина Q_6 определяется для случая чистого кручения $Q_6 = \pi R S_b$ (S_b — критическое усилие чистого кручения). Неоднородные касательные усилия (1.1) при этом заменяются амплитудой, а усилия T_1^0 не учитываются. Величина Q_0 определяется как меньшая из трех величин Q_4 , Q_5 , Q_6 . При этом Q_4 определяется из равенства амплитуды неоднородного нормального напряжения критическому напряжению при чистом сжатии

$$\frac{Q_4 L}{\pi R^2 h} = \sigma_b, \quad \sigma_b = \frac{Eh}{\sqrt{3(1-\nu^2)} R}. \quad (2.1)$$

Неоднородные усилия T_1^0 в этом случае заменяются их амплитудой, а сдвигающие усилия не учитываются. Усилие Q_5 находится графоаналитическим методом для случая совместного действия однородных сжимающих и сдвигающих усилий, равных по величине значениям неоднородных усилий в точке $x = L$, $\varphi = 5\pi/4$. Этот подход применен также и в случае действия по-

перечной нагрузки, равномерно распределенной по поверхности оболочки. Примерно такой же анализ устойчивости оболочки использовал А. А. Добряков [13.1].

Результаты экспериментов содержатся в работах [13.1, 13.4, 6.13]. Лундквист [13.4] испытывал консольно закрепленные оболочки различной длины. Критическое напряжение сдвига в эксперименте оказалось в среднем в 1,6 раза больше критического напряжения при кручении. Минимальная величина 1,25 была использована в работе [11.23] для построения кривой для комбинированного нагружения

$$R_b + R_\tau^2 = 1. \quad (2.2)$$

Для чистого изгиба в этой зависимости принято $\sigma_{ив} = 1,3 \sigma_b$, где σ_b — эмпирическое критическое усилие сжатия.

В. В. Кабанов испытал 11 точечных дюралюминиевых оболочек (рис. 13.4). Оболочки были выточены на токарном копировальном станке. На рис. 13.5 показана диаграмма деформирования оболочки. По оси ординат отложена сила Q , по оси абсцисс — перемещение свободного края в направлении действия силы. Процесс деформирования протекал следующим образом. В докритической стадии прогибы пропорциональны силе. При верхней критической нагрузке $Q = 154 \text{ кг}$ ($k_d = 0,63$) хлопком образовались две косые вмятины на одной из боковых поверхностей. Нагрузка несколько упала (точка А). При дальнейшем нагружении произошел второй хлопок, образовались еще две вмятины. Нагрузка снизилась еще немного (точка Е). При разгрузке последовательно наблюдалось несколько хлопков. Сначала исчезли две появившиеся последними вмятины, нагрузка возросла (точка В). Потом исчезли последовательно две оставшиеся вмятины (точки С, D). Оболочка возвратилась в исходное состояние. Таким образом, обнаружено несколько закритических равновесных форм, соответствующих разному числу вмятин. Наблюдались и промежуточные слабые выхлопы, когда число вмятин не менялось, но глубина их уменьшалась. Нагрузка выхлопа с ветвей равновесных состояний (точки В, С, D) являются нижними критическими. Наименьшая из них равна 126 кг ($k_d = 0,46$). Отношение наименьшей нижней критической нагрузки к верхней равно 0,82. В отличие от случая осевого сжатия эта величина сравнительно высокая.

Таким образом, в эксперименте было установлено, что при изгибе силой в закритической стадии имеют место различные

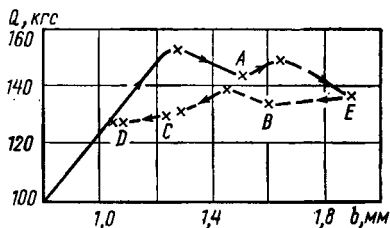


Рис. 13.5. Диаграммы «нагрузка — перемещение» при изгибе оболочки силой.

равновесные формы. Переход от одной формы к другой при нагружении осуществляется хлопком, происходящим в сотые доли секунды. Величина падения нагрузки после хлопка зависит от формы потери устойчивости, т. е. в конечном счете от геометрии оболочки. При сдвиговой и смешанной формах потери устойчивости падение нагрузки небольшое. При разгрузке смена форм потери устойчивости происходит выхлопом с небольшим возрастанием нагрузки. Самая меньшая из всех нагрузок выхлопа является нижней критической. Величина ее для исследованных оболочек на 20—25% меньше величины верхней критической нагрузки.

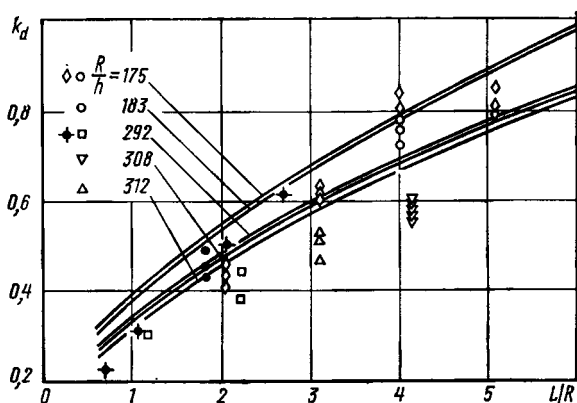


Рис 13.6. Экспериментальные и расчетные значения относительных критических величин амплитуды сжимающих напряжений при изгибе оболочки силой.

На рис. 13.6 дано сравнение расчетных и экспериментальных значений верхних критических нагрузок. На рис. 13.6 нанесены результаты П. Г. Бурдина, А. А. Добрякова, отмеченные ромбом и точкой с крестиком соответственно, а также результаты В. В. Кабанова (остальные точки). Расхождение расчетных и экспериментальных значений не превышает 30%. В расчетах можно использовать график на рис. 13.2, умножая значения k_d на поправочный коэффициент, равный примерно 0,75.

§ 3. Влияние внутреннего давления

Для исследования этой задачи, как и в случае изгиба силой, используем решение в рядах. В этом случае усилия безмоментного исходного состояния таковы:

$$T_1^0 = S_0 \xi \cos \varphi + 1/2 PR, \quad T_2^0 = PR, \quad S^0 = -S_0 \sin \varphi. \quad (3.1)$$

В системе (1.2) изменяется только коэффициент α_{mn} :

$$\alpha_{mn} = \frac{k_2^2 D}{2S_b} \frac{\lambda}{n} \left\{ \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} + \frac{12(1 - \nu^2)}{k_2^2 h^2} \left[\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{n^2}{\lambda^2} \right) \frac{P}{E} \frac{R}{h} \right] \right\}.$$

На рис. 13.7 для широкого диапазона значений L/R , R/h даны значения $k_d^* = k_d/k_{d0}$, $k_d = T_a/T_b$, где T_a — амплитуда критического сжимающего усилия, $P^* = \sqrt{12(1 - \nu^2)} PR^2/Eh^2$, k_{d0} —

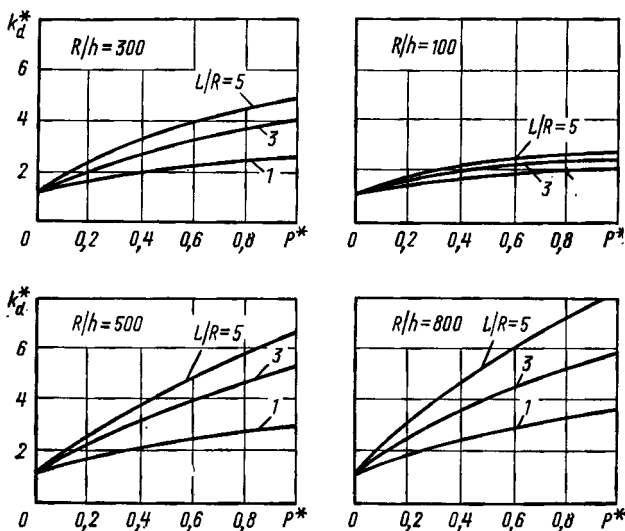


Рис. 13.7. Критические значения относительной величины амплитуды сжимающих напряжений оболочки с внутренним давлением при изгибе силой.

значение k_d без учета внутреннего давления (рис. 13.2). Из графиков видно, что внутреннее давление существенно повышает устойчивость оболочки. Полученные результаты справедливы для оболочек, теряющих устойчивость по сдвиговой форме с образованием косых волн на боковых поверхностях. Это — тонкие сравнительно короткие оболочки при небольших значениях внутреннего давления. Длинные и толстые оболочки теряют устойчивость у заделки с образованием ромбовидных вмятин (как при сжатии). Внутреннее давление при этом менее эффективно.

На рис. 13.8 показаны результаты экспериментов при изгибе оболочки силой с внутренним давлением. Светлые кружочки — эксперименты А. А. Добряков [13.1], темные — М. А. Ильгамова

[13.2], треугольники — результаты В. М. Даревского и Р. И. Кшнякина [20.2], крестики — результаты А. А. Булычева и Б. А. Сахарова, ромбики — результаты В. В. Кабанова.

Экспериментальные данные Р. И. Кшнякина и В. М. Даревского лежат несколько ниже результатов А. А. Добрякова и лучше соответствуют кривой, полученной В. М. Даревским [20.2]. Экспериментам А. А. Добрякова лучше соответствует нижняя граница $R_t^2 = 1,1R_p$. Для остальных результатов эти зависимости оказываются неудовлетворительными.

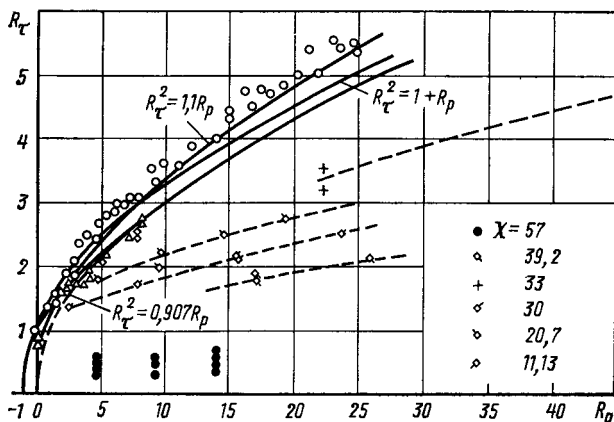


Рис. 13.8. Экспериментальные значения относительной величины амплитуды критических касательных напряжений оболочки с внутренним давлением при изгибе силой.

Приведенных экспериментальных данных недостаточно, чтобы сделать заключения практического характера. Необходимо получить дополнительные данные для широкого диапазона геометрических параметров оболочки и на разных материалах.

Г л а в а XIV

НЕОДНОРОДНОЕ ПО ДЛИНЕ ОСЕВОЕ СЖАТИЕ

§ 1. Линейная задача. Классическая постановка

Исследуем задачу устойчивости свободно опертой оболочки, в срединной поверхности которой действуют неоднородные по длине осевые усилия

$$T_1^0 = -Nf(x), \quad (1.1)$$

где N — амплитуда усилий, $f(x)$ — функция, характеризующая изменение усилий по длине. Усилия типа (1.1) могут возникать, например, в корпусах ракет от действия сил инерции при старте, от веса твердого топлива, в наземных резервуарах — от собственного веса и т. д. (рис. 14.1). В этом случае можно использовать общее решение в рядах гл. VI. При этом функции прогиба и усилий берутся в виде одинарных рядов по продольной координате. Для системы (3.18) гл. VI имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= \frac{T_b}{N}, \quad A = \begin{bmatrix} \beta_{im} \\ \alpha_i \end{bmatrix}, \quad E = [1], \\ C &= [C_m], \quad t_1 = N, \\ \alpha_i &= \frac{i^2}{2} \left(\frac{B_1}{\chi^2} + \frac{\chi^2}{B_1} \right), \quad B_1 = \frac{(i^2 + \beta^2)^2}{i^2}, \\ \beta_{im} &= 2m^2 \frac{R}{L} \int_0^{L/R} f(x) \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_i \xi d\xi, \quad (1.2)\end{aligned}$$

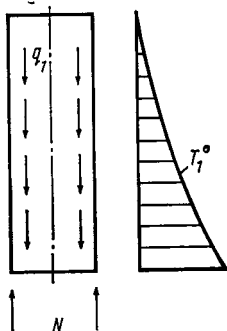


Рис. 14.1. Круговая цилиндрическая оболочка под действием неоднородного по длине осевого сжатия.

$$\chi = \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{R}{h}} \sqrt{12(1 - \nu^2)}, \quad \beta = n \frac{L}{\pi R},$$

$$T_b = \frac{Eh^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)} R}.$$

Амплитуда усилия T_1^0 равна

$$N = N^* T_b \quad (N^* = \tilde{\lambda}^{-1}). \quad (1.3)$$

При однородном сжатии $f(x) = 1$, $\beta_{im} = i^2 \delta_{i,m}$, матрица A диагональная, система (3.18) гл. VI распадается на ряд уравнений

$$\alpha_i = N^*.$$

Отсюда (при минимизации α_i) следует классический результат $N^* = 1$, $N = T_b$. В общем случае функцию $f(x)$ можно представить степенным рядом

$$f(x) = \sum_p B_p \left(\frac{x}{L} \right)^p \quad (p = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.4)$$

В этом случае

$$\beta_{im} = m^2 \sum_p B_p I_p, \quad I_0 = 1,$$

$$\begin{aligned}I_p &= \sum_{k=0}^p A_p^k \left[\left\{ \frac{\sin [(m-i)\pi + k\pi/2]}{[(m-i)\pi]^{k+1}} \pi^{p+1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sin [(m+1)\pi + k\pi/2]}{[(m+i)\pi]^{k+1}} \pi^{p+1} + \sin \frac{p\pi}{2} \left[\frac{1}{(m+i)^{p+1}} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{(m-i)^{p+1}} \right] \delta_{p,k} \right\} (1 - \delta_{m,i}) - \delta_{m,i} \sin \frac{k\pi}{2} \frac{1 - \delta_{k,p}}{(2i)^{k+1}} \right] + \frac{\delta_{m,i}}{p+1}.\end{aligned} \quad (1.5)$$

Величина I_p ограничена, а коэффициент $\frac{\alpha_i}{i^2}$ возрастает с увеличением i , так что ряд из коэффициентов $\frac{\beta_{mi}}{\alpha_i}$ абсолютно сходящийся. Следовательно, определитель системы нормальный, что обеспечивает сходимость решения.

Исследуем влияние неравномерности распределения усилия на величину N^* на примере функции

$$f(x) = B_p \left(\frac{x}{L} \right)^p. \quad (1.6)$$

В этом случае $N^* = N_p$, $\bar{\lambda} = \lambda_p$, $N = B_p$. Результаты вычислений на ЭВМ методом итераций показаны на рис. 14.2.

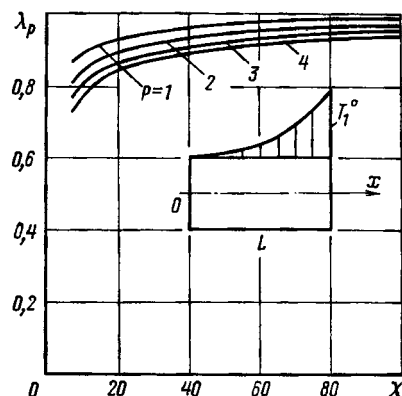


Рис. 14.2. Критические значения относительной величины амплитуды неоднородного по длине сжимающего усилия свободно опертой оболочки при безмоментном исходном состоянии.

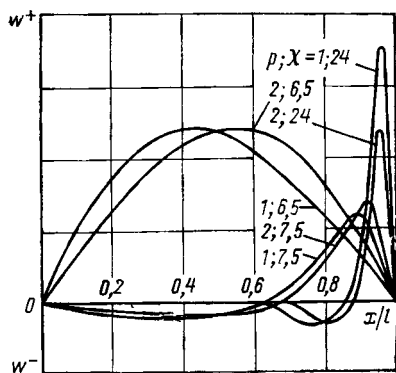


Рис. 14.3. Форма потери устойчивости оболочки при неоднородном по длине осевом сжатии.

Наибольший порядок матрицы A равнялся 48. На рис. 14.3 показаны формы потери устойчивости. При малых χ оболочка выпучивается с одной полуволной по длине. С увеличением χ амплитуды прогибов локализуются ближе к месту действия наибольшего усилия сжатия. Влияние числа p на форму потери устойчивости незначительно, хотя с ростом p и наблюдается небольшое смещение амплитуды вмятин в сторону наибольшего сжимающего усилия.

На рис. 14.2 даны значения λ_p . Результаты для $p = 1$ совпадают с результатами, полученными в работе [14.12]. С ростом неоднородности усилия и уменьшением параметра χ влияние

неоднородности растет. Для длинных оболочек ($\chi \geq 100$) влияние неоднородности незначительно. Амплитуда критического неоднородного усилия примерно равна критическому однородному усилию.

§ 2. Влияние граничных условий и моментности исходного состояния

Исходное напряженно-деформированное состояние оболочки определяется решением уравнения нелинейного краевого эффекта

$$Dw_{xxxx} + N(fw_{xx} + f_x w_x) + E h k_2^2 w = -k_2 \nu N f. \quad (2.1)$$

Здесь

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k_2 = \frac{1}{R}, \quad (2.2)$$

E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; w — прогиб оболочки; R , h — радиус и толщина оболочки. Координата x в индексах означает дифференцирование. Уравнение (2.1) имеет переменные коэффициенты, поэтому будем его решать численно. Введя обозначения:

$$\eta = \frac{x}{\theta}, \quad W = \frac{w}{\theta}, \quad N^* = \frac{N}{T_b} = \frac{N}{2E h \alpha_0^2}, \quad (2.3)$$

$$\theta^2 = \frac{hR}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad \alpha_0 = k_2 \theta, \quad T_b = \frac{E h^2}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}},$$

запишем уравнение (2.1) в безразмерном виде

$$W_{\eta\eta\eta\eta} + 2N^*(fW_{\eta\eta} + f_{\eta}W_{\eta}) + W = -2\nu N^* f \alpha_0. \quad (2.4)$$

Далее заменим уравнение (2.4) системой двух уравнений второго порядка

$$W_{\eta\eta} = \Psi, \quad (2.5)$$

$$\Psi_{\eta\eta} + 2N^*(f\Psi + f_{\eta}W_{\eta}) + W = -2\nu \alpha_0 N^* f.$$

Разбив относительную длину оболочки $\eta_m = L/\theta$ на m частей с шагом $c = \eta_m/m$ и заменив производные через центральные разности

$$2c\omega_{i\eta} = \omega_{i+1} - \omega_{i-1}, \quad c^2\omega_{i\eta\eta} = \omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}, \quad (2.6)$$

запишем систему (2.5) в конечно-разностной форме

$$\begin{aligned} W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1} - c^2\Psi_i &= 0, \\ \Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1} + 2c^2N^*[f_i\Psi_i + f_{i\eta}(W_{i+1} - W_{i-1})/2c] + \\ + c^2W_i + 2\nu c^2\alpha_0 N^* f_i &= 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Введя вектор-столбец $\Phi = [W, \Psi]$, сведем систему (2.7) к одному векторно-матричному уравнению

$$C_i \Phi_{i-1} + B_i \Phi_i + A_i \Phi_{i+1} = \alpha_0 E_i, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ cN^* f_{i\eta} & 1 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} -2 & -c^2 \\ c^2 & -2(1 - c^2 f_i N^*) \end{bmatrix}, \\ C_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c^2 N^* f_{i\eta} & 1 \end{bmatrix}, \quad E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -2vc^2 N^* f_{1i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

— матрицы и вектор-столбец второго порядка.

Уравнение (2.8) следует дополнить граничными условиями, которые можно записать также в векторно-матричной форме

$$G_i (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}) + D_i \Phi_i = 0 \quad (i = 0, m). \quad (2.10)$$

Матрицы G_i, D_i определяются видом граничных условий. Для опертой оболочки ($w = w_{xx} = 0$)

$$G_i = 0, \quad D_i = I = [1], \quad (2.11)$$

для защемленной оболочки ($w = w_x = 0$)

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Таким образом, получили систему $m + 3$ алгебраических уравнений (2.8), (2.10) с $m + 3$ неизвестными. Система имеет рекуррентный характер, ее решение легко получить методом матричной прогонки. Положим

$$\Phi_i = M_i \Phi_{i-1} + N_i. \quad (2.13)$$

Подставив Φ_{i+1} и (2.13) в (2.8) и сравнив с (2.13), получим выражения для матриц:

$$\begin{aligned} M_i &= -(B_i + A_i M_{i+1})^{-1} C_i, \\ N_i &= (B_i + A_i M_{i+1})^{-1} (\alpha_0 E_i - A_i N_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Матрицы M_m, N_m , необходимые для начала счета по рекуррентным формулам (2.14), получим из граничного условия (2.10) при $i = m$

$$G_m (\Phi_{m+1} - \Phi_{m-1}) + D_m \Phi_m = 0. \quad (2.15)$$

В точке $i = m$ должно выполняться и уравнение (2.8). Решая совместно уравнения (2.15), (2.8), находим

$$\Phi_m = -(G_m B_m - D_m A_m)^{-1} G_m [(A_m + C_m) \Phi_{m-1} - \alpha_0 E_m]. \quad (2.16)$$

Сравнивая (2.16) с (2.13) при $i = m$, получаем

$$\begin{aligned} M_m &= -(G_m B_m - D_m A_m)^{-1} (C_m + A_m), \\ N_m &= \alpha_0 (G_m B_m - D_m A_m)^{-1} E_m. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Начальное значение вектора Φ в зависимости (2.13) получим из граничного условия (2.10) при $i = 0$, подставив в него Φ_1 , Φ_{-1} согласно (2.13)

$$\Phi_0 = [G_0(M_0^{-1} - M_1) - D_0]^{-1} G_0(N_1 + M_0^{-1} N_0). \quad (2.18)$$

Формулы (2.13), (2.14), (2.17), (2.18) составляют вычислительный алгоритм матричной прогонки. По найденным значениям Φ_i определяются его компоненты W_i , Ψ_i . После этого находится окружное усилие

$$T_2 = -Ehk_2 w + \nu T_1. \quad (2.19)$$

Устойчивость исходного состояния оболочки исследуем, используя уравнения устойчивости пологих оболочек:

$$\begin{aligned} DV^4 w - k_2 F_{xx} - T_1^0 w_{xx} - T_2^0 w_{yy} - T_{1x}^0 w_x - F_{yy} w_{xx}^0 - \\ - F_{yyx} w_x^0 = 0, \\ \nabla^4 F + Eh(k_2 w_{xx} + w_{xx}^0 w_{yy}) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Эти уравнения так же, как и уравнение (4.1) гл. VI, сводим к системе векторно-матричных уравнений

$$C_i \Phi_{i-1} + B_i \Phi_i + A_i \Phi_{i+1} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m). \quad (2.21)$$

Здесь A_i , B_i , C_i — матрицы четвертого порядка

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c\beta^0 W_\eta^0}{2\alpha_0} & cf_\eta N^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c\beta^2 W_\eta^0}{2\alpha_0} & -cf_\eta N^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_i &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & -2 & -c^2 & 0 \\ -\frac{c^2 \beta^2 W_\eta^0}{\alpha_0} & c^2 \beta^2 \left(\beta^2 - \frac{W_\eta^0}{\alpha_0} - 2\nu f N^* \right) & -2[1 + c^2(\beta^2 + f N^*)] & -c^2 \\ c^2 \beta^2 & c^2 \beta^2 \frac{W_\eta^0}{\alpha_0} & c^2 & -2(1 + c^2 \beta^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Граничные условия записываются согласно (4.15) гл. VI. Для вычисления определителя системы алгебраических уравнений получается рекуррентный процесс, аналогичный описанному

в гл. VI:

$$\Delta = \Delta_p \Delta_1,$$

$$\Delta_1 = |B_0| \Delta^0, \Delta^0 = \Delta_p^0 \Delta_1^0, \Delta_p^0 = |B_1|, \Delta_p = |(D_0 + G_0 M_1) M_0 - G_0|,$$

$$\Delta_1^0 = |B_2 B_3 \dots B_m A_m|,$$

$$B_i = B_i - A_i B_{i+1}^{-1} C_{i+1} = B_i + A_i M_{i+1}, \quad (2.23)$$

$$M_i = -B_i^{-1} C_i = -(B_i + A_i M_{i+1})^{-1} C_i,$$

$$B_m = D_m - G_m A_m^{-1} B_m,$$

$$M_m = B_m^{-1} G_m (I + A_m^{-1} C_m).$$

Вычисление критического усилия производится так же, как это было описано в гл. VI. Результаты вычислений значений N^*

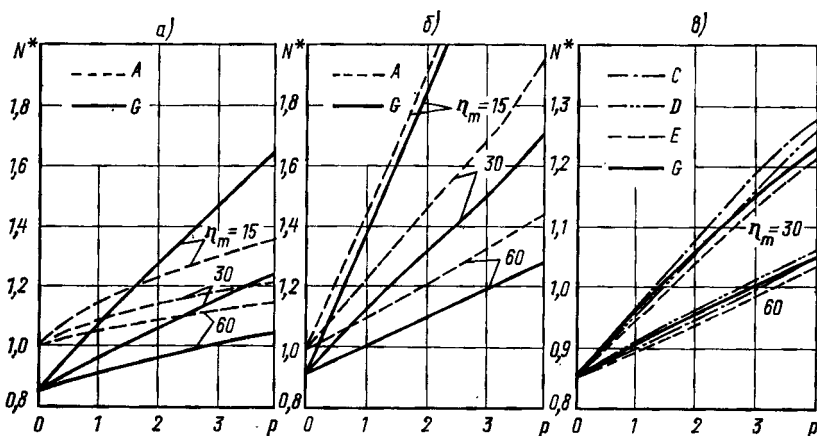


Рис. 14.4. Критические значения относительной величины амплитуды неоднородного по длине сжимающего усилия опертых и зашеченных оболочек при моментном исходном состоянии.

[14.5] для зашеченной и опертой оболочек показаны на рис. 14.4. В случае А исходное состояние оболочки считалось безмоментным ($w_x^0 = w_{xx}^0 = 0$). В случае С учтена моментность исходного состояния ($w_{xx}^0 \neq 0$) и принято $w_x^0 = 0$, $T_{1x}^0 = 0$ (следящие усилия). В случае D: $T_{1x}^0 = 0$, $w_{xx}^0 \neq 0$, $w_x^0 \neq 0$, в случае E: $w_{xx}^0 \neq 0$, $w_x^0 = 0$, $T_{1x}^0 \neq 0$. В случае G учтены моментность исходного состояния и консервативность усилия T_1^0 ($w_{xx}^0 \neq 0$, $w_x^0 \neq 0$, $T_1^0 \neq 0$). На рис. 14.4, а показаны зависимости N^* от p при трех значениях параметра η_m для свободно опертой, а на рис. 14.4, б — для зашеченной оболочки. Эти зависимости близки к линейным.

Моментность исходного состояния уменьшает величину критического усилия, за исключением случая очень коротких оболочек при больших значениях p . С увеличением параметра p и уменьшением параметра η_m относительная величина снижения величины критического усилия уменьшается. У коротких оболочек при большой степени неоднородности усилий ($p = 4$) моментность исходного состояния приводит к повышению устойчивости оболочки. Короткие оболочки теряют устойчивость с образованием одной полуволны по длине. Искривления образующих оболочки вблизи опор делают ее более жесткой для такой формы потери устойчивости, чем, по-видимому, и можно объяснить повышение величины критического усилия при учете моментности исходного состояния.

На рис. 14.4, в показано влияние слагаемых уравнения (2.20), содержащих члены ω_x^0 , T_{1x}^0 . Эти члены характеризуют консервативность усилий T_1^0 по направлению. Для следящих усилий они равны нулю. Видно, что влияние этих членов небольшое. Учет слагаемого с T_{1x}^0 несколько снижает, а учет слагаемого с ω_x^0 повышает величину критического усилия.

Г л а в а XV

НЕОДНОРОДНОЕ ПО ОКРУЖНОСТИ ОСЕВОЕ СЖАТИЕ

§ 1. Линейная задача. Классическая постановка

Рассмотрим свободно опертую по краям круговую цилиндрическую оболочку при действии в ее срединной поверхности осевых усилий (рис. 15.1)

$$T_1^0 = -t_1 f_1(\varphi), \quad (1.1)$$

где t_1 — амплитуда усилий, $f_1(\varphi)$ — четная функция координаты φ , удовлетворяющая условиям Дирихле. Такие усилия возникают в оболочках при чистом изгибе, внецентренном сжатии, неоднородном сжатии, неравномерном нагреве по окружности. Исходное состояние при этих нагрузках близко к безмоментному, так что прогибы этого состояния учитываться не будут. Основное внимание уделим изучению влияния неоднородности усилий (вида функции $f_1(\varphi)$) на устойчивость оболочки. Частично этот вопрос уже выявлялся в гл. XII на примере оболочки, нагруженной изгибающим моментом.



Рис. 15.1. Круговая цилиндрическая оболочка под действием неоднородного по окружности осевого сжатия.

Будем исследовать задачу с помощью алгоритма тригонометрических рядов, описанного в гл. VI. Система (3.9) гл. VI в этом случае имеет вид

$$(1 + \delta_{n,0}) \pi \alpha_n T_b C_n + 2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_0^{\pi} T_1^0 [\cos(k+n)\varphi + \cos(k-n)\varphi] d\varphi = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

В системе (3.18) гл. VI соответствующие величины имеют вид

$$\alpha_n = q_1 + \frac{1}{q_1}, \quad q_1 = \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} \alpha_0, \quad \alpha_0^2 = \frac{h}{R \sqrt{12(1 - \nu^2)}}, \\ I = [1], \quad C = [C_n], \quad A = \left[\frac{\beta_{nk}}{\alpha_n} \right], \quad \tilde{\lambda} = \frac{T_b}{t_1}, \quad \lambda = \lambda_m, \quad (1.3)$$

$$\beta_{nk} = \frac{1}{1 + \delta_{n,0}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(\varphi) [\cos(k+n)\varphi + \cos(k-n)\varphi] d\varphi \\ (n, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Критическое значение амплитуды усилия определяется формулой

$$t_1 = \tilde{k} T_b, \quad \tilde{k} = \tilde{\lambda}^{-1}. \quad (1.4)$$

Здесь $\tilde{\lambda}$ — наибольшее собственное число матрицы A . Для данной оболочки при известной функции $f_1(\varphi)$ величина $\tilde{\lambda}$ зависит от параметра волнообразования по длине λ . Минимум $\tilde{\lambda}$ по λ дает наименьшую величину критического усилия

$$t_1^* = k_* T_b, \quad k_* = \tilde{\lambda}_*^{-1}. \quad (1.5)$$

Из структуры матрицы A видно, что определитель системы (1.2) нормальный, что обеспечивает сходимость решения.

Исследование влияния неоднородности усилия проведем на примере усилия

$$T_1^0 = -A_p \cos p\varphi. \quad (1.6)$$

В этом случае в формулах (1.3), (1.5) следует положить

$$t_1^* = A_p^*, \quad \tilde{\lambda}_* = \lambda_{p*}, \quad k_* = k_{p*}, \quad \beta_{0k} = \delta_{k,p}, \\ \beta_{nk} = \delta_{k+n,p} + \delta_{|k-n|,p}. \quad (1.7)$$

Значения λ_p были вычислены [14.2] методом итераций на ЭВМ из матриц 15—50 порядков. Данные расчетов приведены на рис. 15.2—15.5. На рис. 15.2 показаны зависимости λ_p от обобщенных параметров

$$\gamma_p^2 = p^2 \alpha_0^2, \quad \lambda_1^2 = \lambda^2 \alpha_0^2, \quad \alpha_0^2 = \frac{h}{R \sqrt{12(1 - \nu^2)}}. \quad (1.8)$$

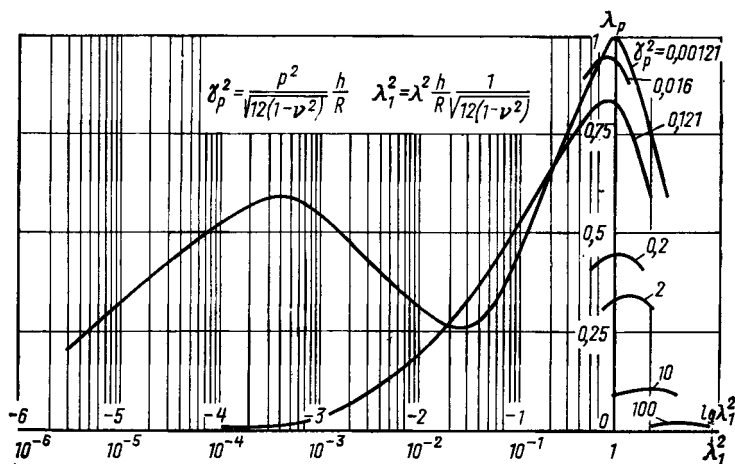


Рис. 15.2. Зависимость собственного значения λ_p от параметра неоднородности γ_p^2 усилия сжатия и параметра волнообразования.

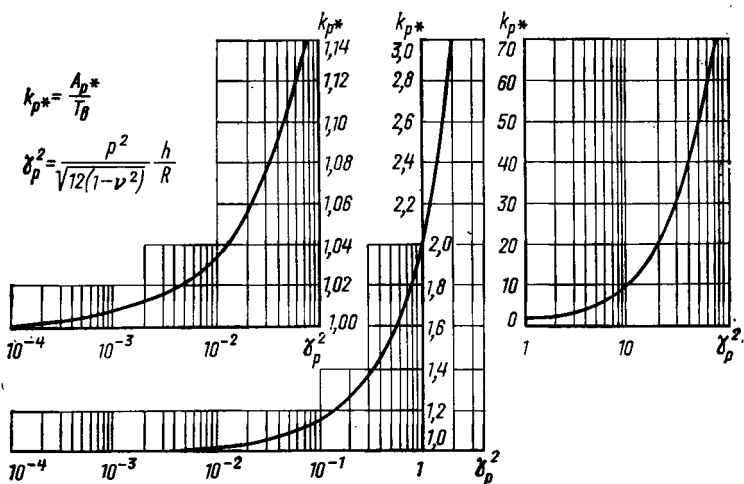


Рис. 15.3. Относительная величина амплитуды критического неоднородного усилия сжатия оболочек средней длины.

Параметр λ характеризует длину волны в продольном направлении. Кривые для больших значений параметра γ_p^2 имеют один максимум, соответствующий наименьшему критическому значению усилия. Для малых значений γ_p^2 кривые имеют два максимума. Первый из них расположен в области малых значений параметра λ_1 (длинные продольные волны), второй — в области больших значений λ_1 (короткие волны). При этом величины λ_p , соответствующие второму максимуму, определяют наименьшие критические усилия. Таким образом, потеря устойчивости оболочки сопровождается образованием коротких продольных волн. При этом зависимость критического усилия от параметра h/R слабая.

На рис. 15.3 для сравнительно длинных оболочек, когда значения параметра λ можно рассматривать как непрерывно изменяющиеся, построены зависимости величин k_{p*} от параметра γ_p^2 .

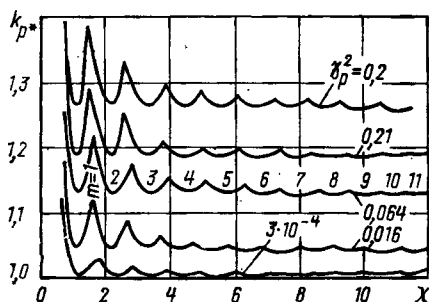


Рис. 15.4. Относительная величина амплитуды критического неоднородного усилия сжатия коротких оболочек.

На рис. 15.4 нанесены значения коэффициента k_{p*} в зависимости от параметров γ_p^2 и χ для коротких оболочек, для которых значения λ следует рассматривать как дискретные.

Приведенные результаты дают полное представление о влиянии неравномерности распределения усилий в окружном направлении на критическое значение их амплитудной величины. При неоднородном сжатии, в отличие от однородного, амплитуда критического усилия не пропорциональна h/R и изменяется в пределах $T_b < A_{p*} < \infty$ в зависимости от значения параметра γ_p^2 . Например, в случае чистого изгиба ($p = 1$) для диапазона толщин оболочки $h/R = 1/30 \div 1/1000$ (параметр γ_p^2 изменяется в пределах $1 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-3}$) коэффициент k_{1*} изменяется в пределах 1,05—1,01. Это значит, что амплитудная величина критического усилия превышает величину критического усилия при однородном сжатии на 1—5%. Для $p = 2$ и тех же значений h/R имеем соответственно 1,5—10%.

У тонких оболочек при небольших значениях p влияние неоднородности усилий незначительно. В этом случае в пределах полуволны усилие изменяется мало и его амплитуда получается близкой к критическому усилию однородного сжатия.

В случае сильной изменяемости усилий и относительно толстых оболочек амплитуда критического усилия может значительно отличаться от критического усилия сжатия, что приводит к необходимости решения системы (1.2). При этом усилие T_1^0 удобно представить рядом

$$T_1^0 = -t_1 f_1(\varphi) = -t_1 \sum A_p \cos p\varphi = -\sum B_p \cos p\varphi. \quad (1.9)$$

Коэффициенты β_{nk} определяются выражениями: -

$$\beta_{0k} = A_k (1 + \delta_{0,k}), \quad \beta_{nk} = A_{k+n} + A_{k-n} (1 + \delta_{n,k}). \quad (1.10)$$

Из рис. 15.2 видно, что выпучивание оболочки происходит с образованием очень коротких волн в продольном направлении, так что λ^2 — большое число. В связи с этим интересно рассмотреть задачу устойчивости оболочки в предположении $\lambda^2 \gg n^2$. В этом случае коэффициент α_n фактически не зависит от n , а критическое усилие, следовательно, пропорционально α_n . Покажем, что амплитудная величина критического усилия в этом случае точно равна критическому усилию при однородном сжатии. Запишем систему (1.2) для случая усилия (1.6) в виде

$$\lambda_p \alpha_0 C_0 = C_p, \quad (1.11)$$

$$\lambda_p \alpha_n C_n = C_{n+p} + C_{n-p}. \quad (1.12)$$

Из условия минимума α_n определяем длину волны в продольном направлении

$$\lambda^2 = \sqrt{12(1 - \nu^2)} R/h. \quad (1.13)$$

При этом $\alpha_n = 2$. Уравнение (1.12) рассматриваем как уравнение в конечных разностях. Запишем его решение

$$C_n = B_1 P_1^{n/p} + B_2 P_2^{n/p},$$

здесь

$$P_1 = \lambda_p + \sqrt{\lambda_p^2 - 1}, \quad P_2 = \lambda_p - \sqrt{\lambda_p^2 - 1}.$$

Удовлетворяя уравнению (1.11) и условию равенства нулю коэффициента C_n при достаточно больших $n = n_1$, получаем однородную систему двух линейных алгебраических уравнений относительно постоянных B_1, B_2

$$B_1 P_1^{n_1/p} + B_2 P_2^{n_1/p} = 0, \quad B_1 P_2 + B_2 P_1 = 0.$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, находим:

$$\lambda_p = 1, \quad A_p^* = T_n.$$

Таким образом, допущение $\lambda^2 \gg n$ эквивалентно замене неоднородного усилия однородным, по величине равным амплитудному значению неоднородного усилия.

§ 2. Нелинейная задача

Решения нелинейной задачи получены в работах Л. И. Манаевича [14.7, 14.8], Лу и Нэша [12.9]. В первой работе рассмотрен случай действия усилия

$$T_1^0 = -T(A_0 + A_p \cos p\varphi) = -B_0(1 + \delta \cos p\varphi), \quad (2.1)$$

где $\delta = B_p/B_0 = A_p/A_0$. Использовалась функция прогиба

$$w = f(\cos \lambda \xi \cos n\varphi + a \cos 2\lambda \xi + b \cos 2n\varphi) \cos^k(p\varphi/2), \quad (2.2)$$

где k предполагалось четным. Случай $p = 1$ соответствует внецентренному сжатию, при $\delta = 0$ будет чистое сжатие, при $\delta = \infty$ — чистый изгиб. В случае $p > 1$ действует усилие сжатия и самоуравновешенные нагрузки. Для случая внецентренного сжатия получены величины $k_{pn} = \sigma_{ни}/\sigma_v$ ($\sigma_{ни}$ — амплитуда нижнего критического напряжения, σ_v — верхнее критическое напряжение сжатия) в зависимости от δ :

δ	0	0,10	0,25	2,5	1	2	∞
k_{pn}	0,18	0,20	2,225	0,25	0,26	0,26	0,26

Для общего случая получено (σ_{nc} — нижнее критическое напряжение сжатия):

$\alpha = 1 + \delta$	1,00	1,10	1,25	1,50	1,75	1,75	2
$\sigma_{ни}/\sigma_{nc}$	1,00	1,11	1,25	1,44	1,44	1,44	1,44

Таким образом, в случае внецентренного сжатия нижние критические нагрузки лежат между нагрузками для случаев чистого сжатия и изгиба. В общем случае с ростом неоднородности (величины p) наблюдается увеличение величины амплитуды нижнего критического усилия. Лу и Нэш рассмотрели случай внецентренного сжатия.

§ 3. Приближенные оценки. Эксперименты

Получим оценки для критического значения параметра t_1 в ряде (1.9), используя критические значения амплитуд «парциальных» усилий $B_p \cos p\varphi$, найденные в § 1 (рис. 15.3). Очевидно, что

$$B_{p_{\max}}^* > t_1^* > T_v. \quad (3.1)$$

Можно получить и более точные оценки. Рассмотрим сначала случай, когда в предполагаемом месте потери устойчивости $\varphi = \varphi^*$ (φ^* — координата амплитуды усилия сжатия) складываемые

ряда (1.9) имеют одинаковый знак. Такие усилия будем называть усилиями первого рода. Парциальные усилия будем называть подобными, если их амплитуды соответствуют φ^* . При действии одного «парциального» усилия $B_p \cos p\varphi$ имеем

$$|B_p^*| = k_{p^*} T_B, \quad (3.2)$$

при одновременном действии нескольких парциальных усилий —

$$|B_p| < |B_p^*|.$$

Условием неустойчивости, очевидно, может служить оценка

$$\sum_p \frac{|B_p|}{|B_p^*|} = 1. \quad (3.3)$$

При этом предполагается, что парциальные усилия подобны. Из равенства (3.3) получим критическую величину параметра t_1

$$t_1^* = \frac{T_B}{\sum_p \frac{|A_p|}{k_{p^*}}}. \quad (3.4)$$

Если парциальные усилия не являются подобными, то вместо равенств (3.3), (3.4) имеем неравенства:

$$\sum_p \frac{|B_p|}{|B_p^*|} > 1, \quad t_1^* > \frac{T_B}{\sum_p \frac{|A_p|}{k_{p^*}}}. \quad (3.5)$$

Введем коэффициенты подобия парциальных усилий $\cos p\varphi^*$, показывающие, во сколько раз в месте вероятного выпучивания усилие $B_p \cos p\varphi$ меньше его амплитуды. В таком случае имеют место неравенства:

$$\sum_p \frac{B_p \cos p\varphi^*}{|B_p^*|} < 1, \quad t_1^* < \frac{T_B}{\sum_p \frac{A_p \cos p\varphi^*}{k_{p^*}}}. \quad (3.6)$$

Неравенства (3.5), (3.6) дают двухстороннюю оценку параметру t_1^* . В случае подобных парциальных усилий они переходят в равенство (3.4).

Рассмотрим случай, когда в месте вероятного выпучивания $\varphi = \varphi^*$ некоторые парциальные усилия $B_p \cos p\varphi^*$ ($p = n, n+1, \dots, m$) отрицательны. Очевидно, усилие

$$T_{1m}^0 = -t_1 \left[f_1(\varphi) - \sum_{p=n}^m B_p \cos p\varphi \right] \quad (3.7)$$

является усилием первого рода, для которого известно критическое значение параметра $t_1^* = t_m$. С другой стороны, так как $t_{1p}^* |A_p| = k_{p*} T_b$, из условия (3.5) имеем оценку

$$\frac{1}{t_1^*} \leq \sum_p \frac{1}{t_{1p}^*}. \quad (3.8)$$

Знак равенства здесь возможен только при подобных парциальных усилиях. Применяя оценку (3.8) к усилию (3.7), находим

$$\frac{1}{t_m} \leq \frac{1}{t_1^*} + \sum_{p=n}^m \frac{|A_p|}{k_{p*} T_b}, \quad (3.9)$$

откуда получаем

$$t_1^* \leq \left[\frac{1}{t_m} - \sum_{p=n}^m \frac{|A_p|}{k_{p*} T_b} \right]^{-1}. \quad (3.10)$$

Знак равенства здесь будет только при подобных парциальных усилиях и $A_p = 0$ ($p = n, n+1, \dots, m$). Величина t_m определяется согласно оценкам (3.5), (3.6)

$$T_b \left(\sum_p' \frac{A_p \cos p\varphi^*}{k_{p*}} \right)^{-1} > t_m > T_b \left(\sum_p' \frac{|A_p|}{k_{p*}} \right)^{-1}. \quad (3.11)$$

Индекс ' означает, что в сумме пропущены слагаемые с $p = n, n+1, \dots, m$. Двухсторонней оценкой для параметра t_1^* , очевидно, может служить неравенство

$$T_b \left(\sum_p' \frac{A_p}{k_{p*}} \cos p\varphi^* - \sum_{p=n}^m \frac{|A_p|}{k_{p*}} \right)^{-1} \geq t_1^* \geq T_b \left(\sum_p' \frac{|A_p|}{k_{p*}} \right)^{-1}, \quad (3.12)$$

которое следует из (3.5), (3.10), (3.11).

Если параметр t_1^* представить в виде

$$t_1^* = k_* T_b, \quad (3.13)$$

то согласно оценкам (3.11) и (3.12) получим неравенства

$$1 < k_* < k_{p* \max}^*, \quad (3.14)$$

$$\left(\sum_p' \frac{|A_p|}{k_{p*}} \right)^{-1} \leq k_* \leq \left(\sum_p' \frac{A_p \cos p\varphi^*}{k_{p*}} - \sum_{p=n}^m \frac{|A_p|}{k_{p*}} \right)^{-1}. \quad (3.15)$$

Следует брать меньшие значения k^* , которые получаются из этих неравенств.

Используя полученные неравенства, можно оценить амплитуду критического неоднородного усилия, не решая полностью задачи.

Пример

$$A_0 = 1/5, \quad A_1 = A_2 = 2/5, \quad \alpha_0^2 = 1 \cdot 10^{-3}.$$

Согласно рис. 15.3 имеем

$$k_{1*} = 1,010, \quad k_{2*} = 1,02, \quad k_{0*} = 1.$$

По формуле (3.15) найдем

$$k_* = 1,011.$$

Амплитуда критического усилия при этом равна

$$t_1^* = 1,011 T_B.$$

Согласно оценке (3.1)

$$T_B < t_1^* < 1,02 T_B.$$

Отметим еще некоторые приближенные формулы, полученные для внецентренного сжатия. Б. М. Броуде [14.1] получил формулы:

$$R_B = 1 + \alpha/8, \quad (3.16)$$

где

$$R_B = \frac{\sigma_n + \sigma_c}{\sigma_B}, \quad \alpha = 1 - \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad (3.17)$$

σ_B — берется из эмпирических данных, $\sigma_{\max}$ — максимальное напряжение сжатия, $\sigma_{\min}$ — напряжение у противоположного конца диаметра, и

$$\sigma_n + \sigma_c = \left(\frac{1 - \alpha/2}{\sigma_B} + \frac{\alpha}{2\sigma_{нв}} \right)^{-1}, \quad (3.18)$$

где σ_B , $\sigma_{нв}$ — критические напряжения при раздельном действии нагрузок сжатия или изгиба. Эта формула получена из зависимости

$$R_B + R_c = 1, \quad (3.19)$$

используемой в работе [23.12].

В работе В. М. Кулакова [14.6] приведена формула

$$R_B = \frac{1}{1 - 0,11\alpha}. \quad (3.20)$$

При этом σ_B рекомендуется определять по формуле

$$\sigma_B = 2,35 \frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (3.21)$$

Экспериментальных работ по неоднородному сжатию мало. На рис. 15.5 представлены результаты [20.8] для случая изгиба и сжатия. Для большинства точек подходит зависимость (3.19).

Устойчивость стальных и дюралюминиевых оболочек при осевой неравномерной по окружности нагрузке изучалась в работе [14.11]. Было испытано большое количество оболочек при

различных законах распределения нагрузки, начиная от равномерного распределения и кончая локальным. Показано, что для оценки устойчивости тонких оболочек можно использовать равенство амплитуды усилия сжатия критическому усилию однородного сжатия. Этим подтверждаются теоретические решения. В эксперименте [14.7], где испытывались оболочки, нагруженные

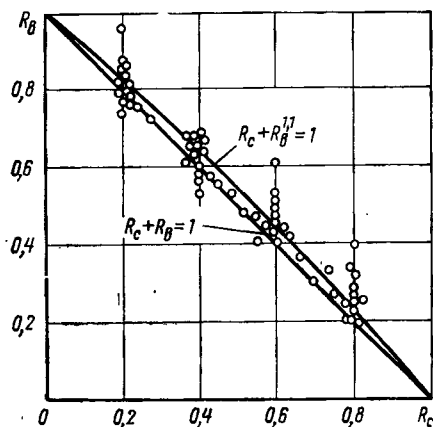


Рис. 15.5. Экспериментальные значения критических относительных величин однородного усилия сжатия и амплитуды сжимающего усилия при изгибе моментом.

сосредоточенными осевыми силами, амплитуда критического усилия получалась выше критического усилия сжатия на 17—50%. По-видимому, такой результат следует отнести за счет влияния начальных неправильностей. В несовершенных оболочках амплитуда неоднородного критического усилия может превышать критическое усилие однородного сжатия, так как неправильность не всегда совпадает с местом действия амплитуды. Это подтверждается экспериментами при чистом изгибе, в которых, как правило, амплитуда критического усилия получается выше критического однородного усилия.

В заключение отметим, что приведенные выше расчетные данные носят приближенный характер, поскольку при определении верхних критических усилий исходное состояние оболочек принималось безмоментным. Желательно их уточнение, особенно при сильной изменяемости усилий. В этом случае, как показывают предварительные расчеты, моментность и нелинейность исходного состояния могут изменить критические величины амплитуд усилий. Это замечание относится и к задаче, рассмотренной в гл. VIII.

Г л а в а XVI

НЕОДНОРОДНОЕ ПО ДЛИНЕ ВНЕШНЕЕ ДАВЛЕНИЕ

§ 1. Случай безмоментного исходного состояния

При осесимметричном неоднородном по длине оболочки давлении $q(x)$ (рис. 16.1) окружное усилие в исходном состоянии можно представить в виде

$$T_2^0 = -t_2 f_2(x), \quad (1.1)$$

где t_2 — параметр (амплитуда усилий), $f(x)$ — произвольная функция x , характеризующая изменение усилий по длине. Впервые, по-видимому, задачи такого рода рассматривались в работах Х. М. Муштари, С. В. Прохорова [16.6, 16.7] (1954—1957) и Хоффа [16.13] (1957).

Для исследования задачи в этом случае можно использовать решение гл. VI в рядах. Система (3.9) гл. VI имеет вид [21.5]

$$\begin{aligned}
 C_m \left[k_2^2 D \frac{(\lambda_m^2 + n^2)^2}{\lambda_m^2} + \right. \\
 \left. + Eh \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} \right] \frac{\lambda_m^2}{n^2} + \\
 + \frac{R}{L} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^{L/R} T_2^0 [\cos(\lambda_m - \lambda_i) \xi - \\
 - \cos(\lambda_m + \lambda_i) \xi] d\xi = 0 \\
 (m = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

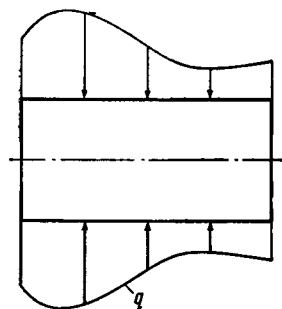


Рис. 16.1. Круговая цилиндрическая оболочка под действием неоднородного по длине давления.

В системе (3.18) соответствующие величины принимают вид

$$\begin{aligned}
 I = [1], \quad C = [C_m], \quad A = \left[\frac{\beta_{mi}}{\alpha_m} \right], \quad \bar{\lambda} = \frac{T_p}{t_2}, \\
 \alpha_m = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \frac{\lambda_1^2}{\beta^2} \left[\frac{(\lambda_1^2 + \beta^2)^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + \beta^2)^2} + \frac{T_1^0}{Eh\alpha_0^2} \right] \chi, \\
 \beta_{mi} = \frac{2}{L/R} \int_0^{L/R} f_2(\xi) [\cos(\lambda_m - \lambda_i) \xi - \cos(\lambda_m + \lambda_i) \xi] d\xi, \quad (1.3) \\
 T_p = Rq_b = 0,858 \frac{Eh}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \sqrt{\frac{h^3}{RL^2}}, \\
 \beta = n\alpha_0, \quad \lambda_1 = \lambda\alpha_0 = \frac{m}{\chi} \\
 (i, m = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

Выражение T_p соответствует критическому усилию при однородном кольцевом сжатии по формуле Саутуэлла — Папковича. Из (1.3) имеем критическое значение амплитуды t_2

$$t_2 = kT_p \quad (k = 1/\bar{\lambda}). \quad (1.4)$$

Если функция $f_2(\xi)$ задана рядом

$$f_2(\xi) = \sum_p A_p \cos \lambda_p \xi, \quad (1.5)$$

коэффициенты β_{mi} определяются выражениями:

$$\beta_{mi} = 2A_0 - A_{m+i} + A_{m-i} (1 + \delta_{m,i}). \quad (1.6)$$

Для данной оболочки при известном выражении функции f_2 величина $\tilde{\lambda}$ зависит от параметра β , характеризующего количество волн по окружности. При заданном значении β $\tilde{\lambda}$ находится как наибольшее собственное число матрицы A . Самое большое число $\tilde{\lambda}_*$ из всех наибольших собственных чисел $\tilde{\lambda}$, соответствующих частным значениям β , определяет наименьшую величину критического усилия

$$t_2^* = k_* T_p \quad (k_* = \tilde{\lambda}_*^{-1}). \quad (1.7)$$

Таким образом, задача по определению критического усилия сводится к нахождению наибольших собственных чисел матрицы A .

§ 2. Влияние неоднородности давления

Полученное решение используем для исследования задачи устойчивости оболочки, в срединной поверхности которой действуют неравномерно распределенные по длине кольцевые усилия

$$T_2^0 = -A_p \cos \lambda_p \xi \quad (\lambda_p = p\pi R/L, \quad p = 1, 2, \dots). \quad (2.1)$$

Усилия $T_2 = -T_2^0/A_p$ при некоторых значениях частоты p показаны на рис. 16.2. В формулах (1.3), (1.7) для этого случая следует положить:

$$T_1^0 = 0, \quad t_2^* = A_{p*}, \quad \tilde{\lambda}_* = \tilde{\lambda}_{p*}, \quad k_* = k_{p*} = \tilde{\lambda}_{p*}^{-1}, \quad (2.2)$$

$$\beta_{mi} = \delta_{m+i, p} - \delta_{m-i, p}.$$

Критическое значение амплитуды T_p определяется выражением

$$t_2^* = k_{p*} T_p. \quad (2.3)$$

Величина $\tilde{\lambda}_{p*}$ является функцией параметра χ , характеризующего материал и геометрию оболочки, частоты изменяемости усилий p и параметра волнообразования в окружном направлении β . При заданных значениях p и χ величина λ_{p*} определяется как самое большое из всех наибольших собственных чисел матрицы A , соответствующих частным значениям параметра β . На рис. 16.3 для $p = 1 \div 10$ в зависимости от χ приведены зна-

чения коэффициента k_{p*} , показывающего, во сколько раз критическая величина амплитуды усилия больше величины критического усилия при однородном кольцевом сжатии. Значения k_{p*}

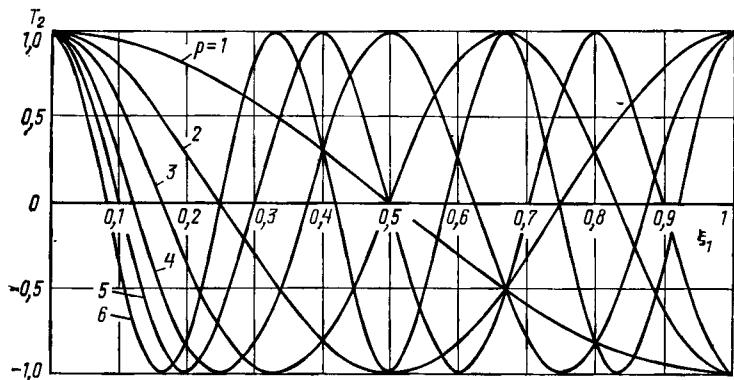


Рис. 16.2. Относительная величина неоднородного окружного усилия при косинусоидальном внешнем давлении.

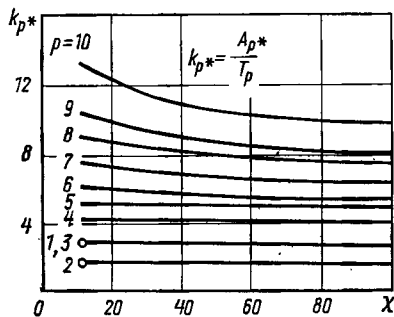


Рис. 16.3. Относительная величина амплитуды критического неоднородного окружного усилия.

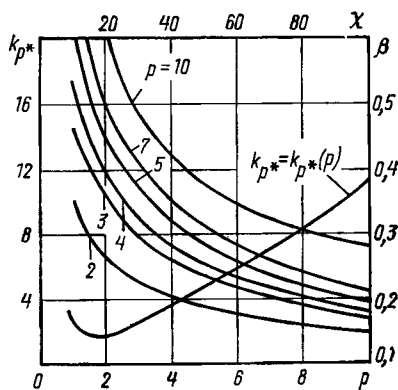


Рис. 16.4. Осредненная относительная величина амплитуды критического неоднородного усилия и величина параметра волнообразования.

были вычислены [21.5] для матриц 15—30 порядков. Точками на рис. 16.3 показаны результаты, полученные Н. Хоффом [16.13] для случаев $p = 1$ и 2.

На рис. 16.4 даны осредненные по всему диапазону χ значения k_{p*} в зависимости от p и значение параметра волнообразования β в зависимости от χ и p .

Как видно из рис. 16.3, 16.4, критическая величина амплитуды усилия и форма волнообразования существенно зависят от степени неоднородности усилия. С ростом частоты p величина коэффициента k_{p*} и количество волн по окружности увеличиваются и тем значительнее, чем меньше параметр χ (короткие оболочки). Наименьшее критическое значение амплитуды соответствует $p = 2$. Величина ее в 1,8 раза больше величины критического усилия при однородном кольцевом сжатии. Для слу-

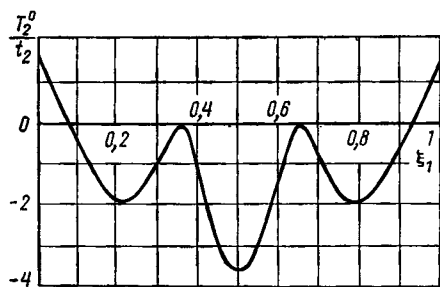


Рис. 16.5. Относительная величина неоднородного окружного усилия при неоднородном давлении.

зованы для приближенной оценки критической величины усилия (4.1).

Рассмотрим, например, оболочку, в срединной поверхности которой действуют усилия

$$T_2^0 = -t_2(A_0 + A_2 \cos \lambda_2 \xi + A_6 \cos \lambda_6 \xi). \quad (2.4)$$

Эти усилия являются усилиями первого рода по определению гл. XV, причем парциальные усилия подобны. Оценка, аналогичная (3.4) гл. XV, имеет вид

$$t_2^* = \frac{T_p}{\sum_p \frac{|A_p|}{k_{p*}}} = k_* T_p. \quad (2.5)$$

Предположим, что $A_0 = 1$, $A_2 = -1$, $A_6 = -1,5$, $\chi = 10$. Функция T_2^0/t_2 показана на рис. 16.5. В этом случае согласно рис. 16.3

$$k_{2*} = 1,8, \quad k_{6*} = 6.$$

Используя формулу (2.5), находим

$$k_* = 0,55.$$

чая $p = 1$ амплитуда критического усилия в три раза больше критического усилия при однородном сжатии. Таким образом, при неоднородном кольцевом сжатии выпучивание оболочки будет происходить при наименьшей критической нагрузке, если максимум усилия располагается в середине оболочки.

Данные рис. 16.3 вместе с оценками, приведенными в гл. XV, могут быть исполь-

Наибольшая величина усилия T_2^u будет при $x/L = 0,5$. Критическое значение —

$$t_2^* = 0,55 T_p.$$

§ 3. Линейно изменяющееся давление

Пусть на оболочку действует давление

$$q(x) = q_0(1 - \beta x/L), \quad (3.1)$$

где коэффициент β характеризует неоднородность давления.

Решение для свободно опертой оболочки было получено в тригонометрических рядах Вейнгартеном [14.12] и исследовано на ЭЦВМ. Результаты представлены графиками $k_* = k_*(Z, \beta)$ ($k_* = q_0 L^2 R / \pi D^2$) в диапазоне значений $\beta = 0 \div 2$, $Z = 1 \div 10^5$. Показано, что если вместо полной длины оболочки L взять длину L_q участка, на котором давление является внешним, то неоднородное давление можно заменить однородным с величиной, равной среднему значению давления на этом участке. Таким образом, можно свести задачу к случаю однородного внешнего давления, приняв вместо k_* и L коэффициент

$$k'_* = k_* \begin{cases} 1 - \beta/2 & \text{при } \beta < 1, \\ 1/2\beta & \text{при } \beta > 1 \end{cases}$$

и приведенную длину L_q . Другие варианты граничных условий исследовались В. И. Мяченковым [8.11]. Отношение $\varphi = q_0/q_{00}$ для смешанных вариантов граничных условий (здесь q_{00} — критическое однородное давление) с хорошей точностью аппроксимируются зависимостями:

$$\begin{aligned} C4 - C4 & \quad \varphi = \frac{1}{1 - \beta/2,16}, \\ S3 - S3 & \quad \varphi = \frac{1}{1 - \beta/2,09}, \\ C4 - S3 & \quad \varphi = \frac{1}{1 - \beta/1,93}, \\ S3 - C4 & \quad \varphi = \frac{1}{1 - \beta/2,47}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Возьмем отношение средней величины переменного давления к его амплитуде

$$\varphi_0^{-1} = \frac{q_c}{q_0} = \frac{1}{L} \int_0^1 \left(1 - \beta \frac{x}{L}\right) dx = \frac{2 - \beta}{2}. \quad (3.3)$$

Тогда критическую величину среднего давления можно представить в виде

$$q_c = \frac{\varphi}{\varphi_0} q_{00}. \quad (3.4)$$

График φ/φ_0 показан на рис. 16.6. Из этого графика видно, что оценка устойчивости по величине среднего давления при одинаковых граничных условиях на краях дает погрешность не больше 6,5%. При несимметричных граничных условиях погрешность при $\beta = 1$ может достигнуть 16%.

Если $\beta > 1$, то на части оболочки давление будет вну-

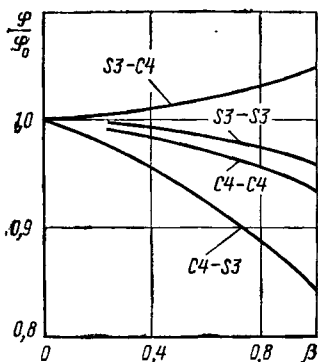


Рис. 16.6. Оценка погрешности расчета по среднему давлению.

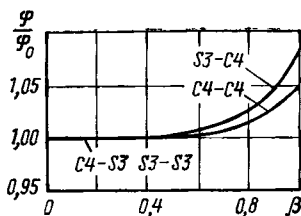


Рис. 16.7. Оценка погрешности расчета по эквивалентному давлению

тренним. В этом случае амплитуда критического давления определяется формулой

$$q_0 = k q_{0e}, \quad (3.5)$$

где q_{0e} — значение q_0 эквивалентной свободно опертой оболочки с длиной L_q , равной длине нагруженного внешним давлением участка оболочки. График $k = k(\beta)$ показан на рис. 16.7 для оболочек с параметром $Z_m = 5 \div 100$. Как видно из этого графика, в этом случае понятие эквивалентной свободно опертой оболочки может быть использовано для оценки устойчивости оболочки и при других граничных условиях. Слабое влияние граничных условий объясняется локальным характером выпучивания оболочки, которая теряет устойчивость в зоне, нагруженной внешним давлением.

Полученные результаты справедливы и для случая нагружения части оболочки линейно изменяющимся давлением

$$q = \begin{cases} q_0 (1 - \beta x/a) & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при } a \leq x \leq L, \end{cases} \quad (3.6)$$

рассмотренного в работе [16.7].

§ 4. Давление, приложенное на части оболочки

Возьмем оболочку, нагруженную равномерным давлением q_0 , приложенным на ее средней части длиной l (рис. 16.8). Впервые эта задача рассматривалась Фельдом, Альмротом и Бращем [16.10, 16.12]. Результаты их исследования, полученные для свободно опертой оболочки методом Релея — Ритца с учетом моментности исходного состояния, представлены многочисленными эквидистантными друг другу графиками. Анализ этих графиков [16.15] показал, что критические давления q_0 частично и q_b полностью нагруженных оболочек связаны простой зависимостью

$$q_0 = \psi q_b. \quad (4.1)$$

Коэффициент пропорциональности ψ зависит от граничных условий и отношения длины нагруженного участка к длине оболочки. При $0,8 < l/L < 1$ критическая величина неоднородного давления равна

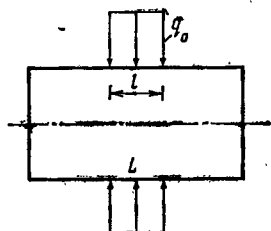


Рис. 16.8. Круговая цилиндрическая оболочка под действием давления, приложенного на ее части.

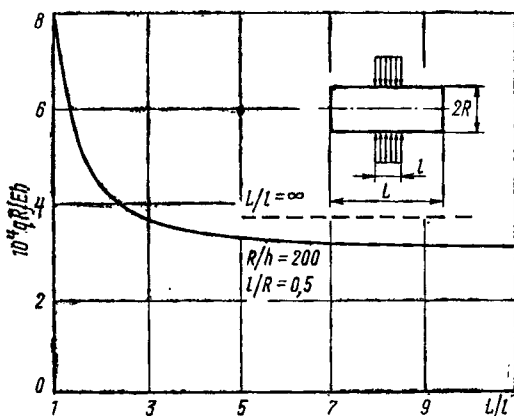


Рис. 16.9. Зависимость относительного критического давления от относительной длины оболочки.

критическому однородному давлению. При уменьшении участка нагружения происходит резкое увеличение параметра q_0 . В предельном случае ($l \rightarrow 0$) получается решение для оболочки, нагруженной по линии, тогда величина критической нагрузки

будет

$$N = q_0 l = 0,45 q_b L = 0,384 \frac{Eh}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}. \quad (4.2)$$

Изложенные результаты относятся к оболочкам средней длины. Влияние длины изучалось в работе Браша и Альмрота [16.10]. Результаты показаны на рис. 16.9. При заданной длине зоны нагружения с увеличением длины оболочки критическое давление падает, стремясь к пределу, равному критическому давлению бесконечно длинной оболочки. Влияние краев в рассмотренном примере ($l/R = 0,5$, $R/h = 200$) сказывалось при $L/l < 5$.

§ 5. Эксперименты

Сведения об испытаниях оболочек, нагруженных равномерным давлением на средней части, содержатся в работах [16.2, 16.10]. В работе [16.10] испытывались стальные оболочки с размерами: $R = 28$ см, $L = 91$ см, $h = 0,089 \div 0,074$ см. Давление создавалось воздухом на участке $l = 12,7$ см. Предварительно емкость заполнялась водой. Замеры деформаций показали, что окружные усилия в исходном состоянии примерно постоянны в нагруженной зоне и быстро (в узкой зоне) затухают по длине. Потеря устойчивости происходила хлопком без падения давления — с ростом прогибов давление увеличивалось. Вмятины образовались в основном в нагруженной зоне. При снятии нагрузки оболочки восстанавливали первоначальную форму. В эксперименте достигнуто хорошее соответствие с расчетом.

В работе [16.2] испытывались оболочки, изготовленные из листовой стали толщиной $h = 0,4$ мм с помощью точечной электросварки. Оболочки имели длину $L = 32$ см и радиус $R = 74$ см. Давление создавалось также воздухом и прикладывалось как на среднем участке оболочки, так и на участке, прилегающем к краю. Результаты испытаний хорошо соответствуют расчетным.

Из всего сказанного можно сделать следующие выводы. Амплитуда неоднородного по длине критического давления может значительно превышать критическое однородное давление, так что в расчетах необходимо учитывать неоднородность давления. Моментность исходного состояния и нелинейность поведения оболочки не оказывают значительного влияния. При локальном нагружении удовлетворительно подтверждаются линейные решения, полученные в предположении безмоментности исходного состояния.

Г л а в а XVII

НЕОДНОРОДНОЕ ПО ОКРУЖНОСТИ ВНЕШНЕЕ ДАВЛЕНИЕ

В этой главе рассмотрим задачи устойчивости цилиндрической оболочки, нагруженной неоднородным по окружности давлением. В оболочке при такой нагрузке в исходном состоянии возникают неоднородные по обеим координатам осевые и сдвигающие усилия. Для исследования задачи используем решение в рядах, полученное в гл. VI.

§ 1. Плавно меняющееся давление. Безмоментное состояние

Рассмотрим консольно закрепленную цилиндрическую оболочку, имеющую на краю жесткий шпангоут (рис. 17.1). Поверхность оболочки нагружена неоднородным плавно изменяющимся по окружности внешним давлением

$$q = q_0 (1 + \alpha_1 \cos \varphi + \alpha_2 \cos 2\varphi). \quad (1.1)$$

Докритическое напряженное состояние оболочки определим по безмоментной теории. Интегрируя уравнения равновесия

$$\begin{aligned} RT_{1x} + S_{\varphi} &= 0, & RS_x + T_{2\varphi} &= 0, \\ T_2 &= -Rq, \end{aligned} \quad (1.2)$$

получаем

$$S = \int_0^x q_{\varphi} dx + f_1(\varphi),$$

$$T_1 = -k_2 \int_0^x S_{\varphi} dx + f_2(\varphi). \quad (1.3)$$

При $x = 0$ усилия S и T_1 равны нулю, следовательно,

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= f_2(\varphi) = 0, \\ T_1 &= 1/2 x^2 k_2 q_0 (\alpha_1 \cos \varphi + 4\alpha_2 \cos 2\varphi), \\ T_2 &= -q_0 R (1 + \alpha_1 \cos \varphi + \alpha_2 \cos 2\varphi), \\ S &= -x q_0 (\alpha_1 \sin \varphi + 2\alpha_2 \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Система усилий (1.4) удовлетворяет условиям статического равновесия оболочки в целом. Момент и поперечная сила в сечении

$$\begin{aligned} M &= \oint T_1 R^2 \cos \varphi d\varphi = 1/2 q_0 \alpha_1 \pi R x^2, \\ Q &= \oint S R \sin \varphi d\varphi = -\pi q_0 \alpha_1 R x \end{aligned} \quad (1.5)$$

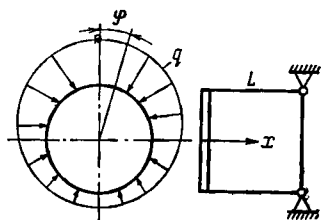


Рис. 17.1. Круговая цилиндрическая оболочка под действием неоднородного по окружности давления.

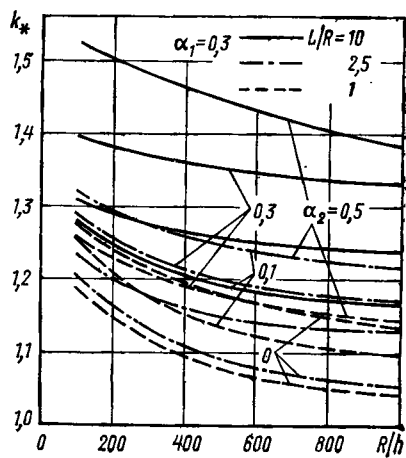
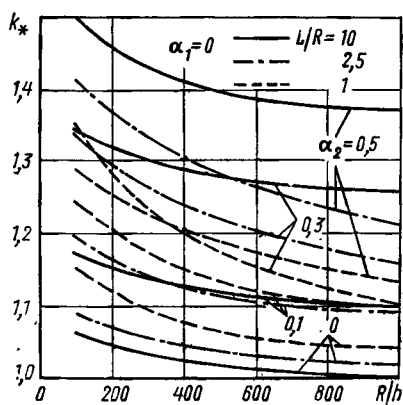


Рис. 17.2 Относительная величина амплитуды критического неоднородного по окружности давления.

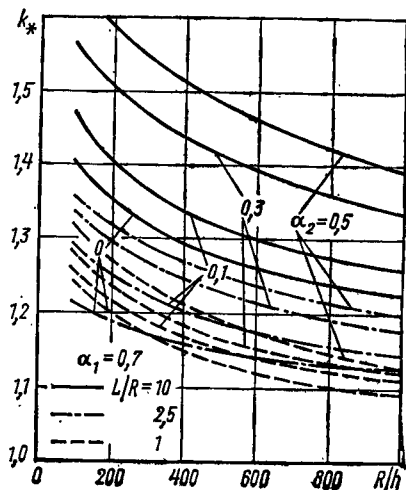
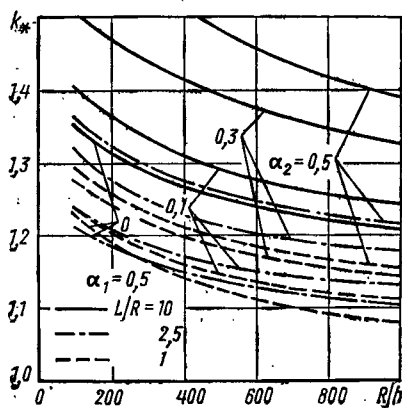


Рис. 17.3. Относительная величина амплитуды критического неоднородного по окружности давления.

уравновешиваются внешней нагрузкой. В системе (3.18) гл. VI в этом случае имеем

$$A = \left[\frac{\beta_{ik}^{mn}}{\alpha_{mn}} \right], \quad I = [1], \quad C = [C_{mn}], \quad \tilde{\lambda} = \frac{q_b}{q_0(1 + \alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$\alpha_{mn} = (1 + \delta_{n,0}) \lambda^2 \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{q_3 R} \left[k_2^2 D \frac{(\lambda^2 + n^2)^2 - 2n^2 + 1}{\lambda^2} + Eh \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right],$$

$$\beta_{ik}^{mn} = \frac{1}{2} I_1 - 2I_2 - I_3,$$

$$I_1 = (k^2 - 1) \delta_{l,m} [2\delta_{k,n} + \alpha_1 (\delta_{k+n,1} + \delta_{|k-n|,1}) + \alpha_2 (\delta_{k+n,2} + \delta_{|k-n|,2})], \quad (1.6)$$

$$I_2 = ik \left[\frac{\delta_{l,m}}{4m} - (-1)^{i+m} (1 - \delta_{l,m}) \frac{m}{i^2 - m^2} \right] \{ \alpha_1 (\delta_{k+n,1} + \delta_{|k-n|,1} (k-n)) + 2\alpha_2 [\delta_{k+n,2} + \frac{1}{2} \delta_{|k-n|,2} (k-n)] \},$$

$$I_3 = i^2 \left[\delta_{l,m} \frac{2\pi^2 m^2 - 3}{24m^2} + 2(1 - \delta_{l,m}) (-1)^{i+m} \frac{im}{(i^2 - m^2)^2} \right] \times$$

$$\times [\alpha_1 (\delta_{k+n,1} + \delta_{|k-n|,1}) + 4\alpha_2 (\delta_{k+n,2} + \delta_{|k-n|,2})]$$

$$(i, m = 1, 2, 3, \dots; n, k = 0, 1, 2, \dots).$$

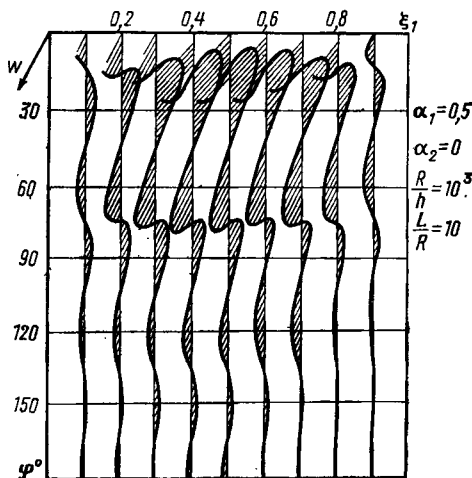
Амплитуда критического давления согласно (1.6) определяется формулой

$$q_0(1 + \alpha_1 + \alpha_2) = k_* q_b \quad (1.7)$$

$$(k_* = \tilde{\lambda}_*^{-1}).$$

Коэффициент k_* показывает, во сколько раз амплитуда неоднородного критического давления больше верхнего критического однородного давления q_b . Задача по отысканию критического состояния оболочки сводится к нахождению наибольшего собственного значения $\tilde{\lambda}_*$ бесконечной матрицы A . Собственный вектор C , соответствующий этому $\tilde{\lambda}_*$, позволяет найти прогибы оболочки. Вычисление $\tilde{\lambda}_*$ удобно производить методом итераций.

Результаты расчетов на ЭВМ представлены на рис. 17.2, 17.3 для различных значений α_1 , α_2 , R/h и L/R . Вычисления



производились с матрицами 24—60 порядков. При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (однородное давление) значения k_* близки к единице. В этом случае критическое давление достаточно хорошо определяется формулой Саутуэлла — Папковича. При увеличении коэффициентов α_1, α_2 (неоднородное давление) коэффициент k_* растет. Неоднородность давления приводит к существенному увеличению амплитуды критического давления по сравнению с величиной критического однородного давления. Наблюдается общая закономерность увеличения коэффициента k_* с ростом $R/h, L/R$, так что неоднородность сильнее проявляется у относительно толстых и длинных оболочек.

На рис. 17.4 на развертке половины ($\xi_1 = x/L$) оболочки показаны формы потери устойчивости.

§ 2. Влияние моментности исходного состояния

Для определения моментных компонентов прогиба и усилий в исходном состоянии используем линеаризованные уравнения (1.32) гл. V

$$k_2^2 D (\nabla^4 w^0 + 2w_{\varphi\varphi}^0 + w^0) + Eh \nabla^{-4} w_{\xi\xi\xi\xi} + q_0 R (w_{\varphi\varphi}^0 + w^0) = R^2 q, \quad (2.1)$$

$$F = -\nabla^{-4} Eh R w_{\xi\xi\xi}^0.$$

В этих уравнениях учитываются только постоянные компоненты безмоментных усилий. Представим давление

$$q = q_0 \alpha_p \cos p\varphi \quad (p = 2, 3, 4, \dots) \quad (2.2)$$

тригонометрическим рядом

$$q = \cos p\varphi \sum_j q_j \sin \lambda_j \xi \quad (2.3)$$

$$\left(q_j = q_0 \frac{4\alpha_p}{\pi j}, \quad \lambda_j = \frac{j\pi R}{L}, \quad j = 1, 3, 5, \dots \right).$$

Прогиб w^0 зададим также рядом

$$w^0 = \cos \varphi \sum w_j \sin \lambda_j \xi. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.1), находим коэффициенты этого ряда

$$w_j = \frac{q_j R^2}{k_2^2 D [(\lambda_j^2 + p^2)^2 - 2p^2 + 1] + Eh \lambda_j^4 / (\lambda_j^2 + p^2)^2 + R q_0 (1 - p^2)}. \quad (2.5)$$

После этого определяются функции F^0 и компоненты усилий

$$F^0 = -EhR \sum_j w_j \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 + p^2)^2} \sin \lambda_j \xi \cos p\varphi,$$

$$T_1^0 = k_2^2 F_{\varphi\varphi}^0, \quad T_2^0 = k_2^2 F_{\xi\xi}^0 + k_2 M_2^0, \quad (2.6)$$

$$S^0 = -k_2^2 F_{\xi\varphi}^0, \quad M_2^0 = -k_2^2 D (w_{\varphi\varphi}^0 + w^0 + \nu w_{\xi\xi}^0).$$

Эти усилия добавляются к безмоментным усилиям (1.4), в которых следует положить $\alpha_2 = 0$.

Определитель (3.14) гл. VI в этом случае имеет вид

$$\left| \frac{\beta_i^m}{\alpha_m} - \bar{\lambda} \delta_{i, m} \right| = 0. \quad (2.7)$$

В выражение (1.6) для β_{ik}^{mn} добавляется слагаемое $\Delta \beta_i^m$:

$$\Delta \beta_i^m = \frac{R}{L} \sum_j \frac{1}{j \alpha'} \left\{ I_{8i}^m + \alpha_{p1} I_{7i}^m \left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} + \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i^2 + k^2)^2} \right] \right\} + \frac{R}{L} I^*, \quad (2.8)$$

где

$$I^* = k_* \alpha_{p1} \frac{1,754}{\omega (1 + \alpha_1 + \alpha_2)} \frac{4}{\pi} \frac{R}{L} \frac{\alpha_p}{p^2 - 1} \sum_q \frac{\left(\sum_i I_{7q}^m \frac{1}{j \alpha'} \right) \left(\sum_i I_{7i}^q \frac{1}{j \alpha'} \right)}{(1 + \delta_{i, 0}) (\lambda_q^2 + l^2)^2},$$

$$I_{8i}^m = \left[-\lambda_i^2 \alpha'_{p1} + (k^2 - 1) \alpha_{p1} \alpha_{p2} - \frac{4}{\pi} k^2 \frac{\alpha_p}{p^2 - 1} p^2 \right] I'_1 + 2k \lambda_i p \alpha_{p1} \alpha_{p3} I'_3,$$

$$\alpha' = \frac{\lambda_j^2}{p^2 - 1} \left[\frac{(\lambda_j^2 + p^2)^2 - 2p^2 + 1}{\lambda_j^2} + \sigma (1 - v^2) \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 + p^2)^2} \right] -$$

$$- \frac{k_*}{\omega} \frac{1,754}{1 + \alpha_1 + \alpha_2},$$

$$I_{7i}^m = -I'_1 (\lambda_j^2 k^2 + p^2 \lambda_i^2) + 2\lambda_i k p \lambda_j I'_3,$$

$$I'_1 = \frac{1}{2} \left(-\lambda_{\pm}^{-1} + \lambda_{\pm}^{-1} + \lambda_{\mp}^{-1} - \lambda_{\mp}^{-1} \right) (\delta_{p, n+k} + \delta_{p, |n-k|}), \quad (2.9)$$

$$I'_3 = \frac{1}{2} (\lambda_{\pm}^{-1} + \lambda_{\pm}^{-1} + \lambda_{\mp}^{-1} + \lambda_{\mp}^{-1}) \left(\delta_{p, n+k} + \delta_{p, |n-k|} \frac{n-k}{p} \right),$$

$$\alpha_{p1} = -\frac{4}{\pi} \frac{\sigma (1 - v^2)}{p^2 - 1} \alpha_p, \quad \alpha_{p2} = \frac{p^2 - 1 + v \lambda_j^2}{\sigma (1 - v^2)} - \frac{\lambda_j^4}{(\lambda_j^2 + p^2)^2},$$

$$\alpha_{p3} = \frac{\lambda_j^3}{(\lambda_j^2 + p^2)^2}, \quad \alpha'_{p1} = \alpha_{p1} \frac{p^2 \lambda_j^2}{(\lambda_j^2 + p^2)^2},$$

$$\lambda_{\pm} = \lambda_i + \lambda_m + \lambda_j, \quad \lambda_{\pm} = \lambda_i + \lambda_m - \lambda_j,$$

$$\lambda_{\mp} = \lambda_i - \lambda_m + \lambda_j, \quad \lambda_{-} = \lambda_i - \lambda_m - \lambda_j, \quad j = 1, 3, 5, \dots,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{12(1 - v^2)}} \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{h}{R}}, \quad \sigma = 12 \left(\frac{R}{h} \right)^2, \quad i \pm m = 2, 4, 6, \dots$$

В выражениях I_1, I_2, I_3 в (1.6) следует положить $\alpha_2 = 0$. Слагаемое I^* в (2.8) вводит нелинейность в (2.7). Если моментное

состояние определять по линейной теории, то $I^* = 0$. Напомним, что в (2.8) под i, m, q следует понимать комплексы ik, mn, ql , которые определяются одинаковыми числами по алгоритму выбора главных членов в рядах, описанному в гл. VI. Суммирование по j в (2.8) связано с разложением (2.3).

Выражения I_{7i}^q, I_{7q}^m вычисляются, как и I_{7i}^m , но при этом соответственно комплексы m и i заменяются на q . Результаты расчетов показывают, что моментность исходного состояния в рассмотренных случаях нагружения плавно изменяющимся давлением не сильно снижает величину критического давления. При сильной изменчивости усилий это влияние может быть более значительным. Однако в этом случае под сомнение ставится возможность линеаризации исходного состояния оболочки.

Следует отметить, что задачи устойчивости оболочек при неосесимметричном нагружении находятся в первой стадии изучения. Мало теоретических результатов, еще меньше экспериментов. Имеющиеся результаты недостаточно обоснованы и проанализированы. Вероятно, при решении задач с сильной изменчивостью неосесимметричного напряженного состояния придется обратиться к решению нелинейных задач. Это касается и задач устойчивости оболочек с неосесимметричными начальными прогибами.

Г л а в а XVIII

НЕОДНОРОДНОЕ ПО ДЛИНЕ КРУЧЕНИЕ

§ 1. Линейная задача. Безмоментное состояние

Рассмотрим свободно опертую по краям на жесткие диафрагмы оболочку (рис. 18.1), в срединной поверхности которой действуют переменные по длине сдвигающие усилия

$$S^0 = t_3 \sum_p A_p \left(\frac{1}{2} + \xi_1 \right)^p \quad \left(\xi_1 = \frac{x}{L}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \right), \quad (1.1)$$

где t_3 — амплитуда усилия, x — продольная координата. Такие усилия возникают в оболочках при нагружении их изменяющимися по длине крутящими моментами. Исходное состояние оболочки считаем безмоментным. Исследуем устойчивость этого состояния, используя уравнения локальной устойчивости оболочек

$$\begin{aligned} DV^4 w - k_2 F_{xx} - 2S^0 w_{xy} - S_x^0 w_y &= 0, \\ \nabla^4 F + E h k_2 w_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k_2 = \frac{1}{R}, \quad \nabla^4 = (\)_{xxxx} + 2(\)_{xxyy} + (\)_{yyyy}, \quad (1.3)$$

E, ν — модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; h, R — толщина и радиус оболочки; w, F — прогиб и функция усилий; y — координата по дуге; x, y в индексах означают частное дифференцирование.

Функцию прогиба возьмем в виде

$$w = h \sum_m a_m \Phi_m, \quad (1.4)$$

$$\Phi_m = \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + n\varphi\right) - (-1)^m \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - n\varphi\right), \quad (1.5)$$

n — число волн по окружности. Эта функция удовлетворяет всем условиям свободного опирания. Функцию усилий найдем из второго уравнения (1.2)

$$F = \frac{EhL^2}{\pi^2 R} \sum_m \frac{m^2 a_m}{(m^2 + \beta^2)^2} \Phi_m \quad (\beta = n \frac{L}{\pi R}). \quad (1.6)$$

Интегрируя первое уравнение (1.2) по Бубнову, приходим после преобразований к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_m

$$a_m a_m \tilde{\lambda} - \sum_i a_i \beta_{mi} = 0 \quad (i, m = 1, 2, \dots). \quad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{S_B}{t_3}, \quad S_B = 0,74 \frac{Eh^*}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h^*}{\xi_0^2}\right)^{1/4}, \quad \xi_0 = \frac{L}{R}, \quad h^* = \frac{h}{R}, \\ a_m &= \frac{\xi_0^2 (1-\nu^2)^{1/8} (\xi_0^2/h^*)^{1/4}}{0,74\pi \sqrt{12}} \frac{m^2}{n} \left(\frac{\pi^4}{\xi_0^4} B_m + \frac{1}{B_m} \right), \\ B_m &= \frac{h^*(m^2 + \beta^2)^2}{m^2 \sqrt{12} (1-\nu^2)}, \quad \beta_{mi} = \beta_{mi}^0 + \beta'_{mi}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

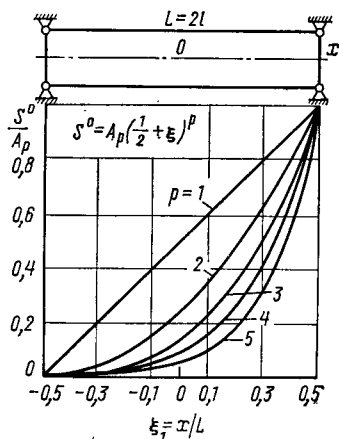


Рис. 18.1. Характер изменения сдвигающих усилий по длине круговой цилиндрической оболочки

$$\beta_{mi}^0 = \sum_p A_p \xi_0 i [1 - (-1)^{i+m}] \times \\ \times \sum_{k=0}^p A_p^k \left\{ \frac{\sin \frac{i+m+k}{2} \pi + \sin \frac{i-m-k}{2} \pi \delta_{k,p}}{(i\pi - m\pi)^{k+1}} - \right. \\ \left. - (-1)^m \frac{\sin \frac{i+m+k}{2} \pi + \sin \frac{i+m-k}{2} \pi \delta_{k,p}}{(i\pi + m\pi)^{k+1}} \right\}, \quad (1.8)$$

$$\beta_{mi}^1 = \sum_p A_p \frac{p \xi_0^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} A_{p-1}^k \left\{ \frac{\cos \frac{i-m+k}{2} \pi + \cos \frac{i-m-k}{2} \pi \delta_{k,p-1}}{(i\pi - m\pi)^{k+1}} - \right. \\ \left. - (-1)^m \frac{\cos \frac{i+m+k}{2} \pi + \cos \frac{i+m-k}{2} \pi \delta_{k,p-1}}{(i\pi + m\pi)^{k+1}} \right\},$$

$$A_p^k = p(p-1) \dots (p-k+1), \quad A_p^k = 1 \quad \text{при} \quad p=0, 1, \quad A_p^0 = 1,$$

S_B — критическое усилие однородного сдвига.

В матричной форме система (1.7) имеет вид

$$(A - \tilde{\lambda} I) C = 0, \quad (1.9)$$

$$A = \left[\frac{\beta_{mi}}{\alpha_m} \right], \quad I = [1], \quad C = [C_m].$$

Задача определения амплитуды критического усилия сводится к нахождению наибольшего собственного числа $\tilde{\lambda}$ матрицы A . Число окружных волн находится из условия максимума $\tilde{\lambda}$. Собственный вектор C позволяет определить прогибы.

§ 2. Влияние неоднородности кручения

Влияние неоднородности усилия сдвига исследуем на примере усилия, заданного членом ряда (1.1)

$$S^0 = S_p = A_p \left(\frac{1}{2} + \xi_1 \right)^p. \quad (2.1)$$

Функция S^0/A_p показана на рис. 18.1. В этом случае

$$t_3 = A_p, \quad \tilde{\lambda} = S_B/A_p = \lambda_p,$$

$$\beta_{mi}^0 = \xi_{0i} [1 - (-1)^{m+i}] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^p A_p^k \left\{ \frac{\sin \frac{i-m+k}{2} \pi + \sin \frac{i-m-k}{2} \pi \delta_{k,p}}{(i\pi - m\pi)^{k+1}} - \right.$$

$$\left. - (-1)^m \frac{\sin \frac{i+m+k}{2} \pi + \sin \frac{i+m-k}{2} \pi \delta_{k,p}}{(i\pi + m\pi)^{k+1}} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\beta'_{mi} = -[1 - (-1)^{m+i}] \times$$

$$\times \frac{p\xi_{0i}^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} A_{p-1}^k \left\{ \frac{\cos \frac{i-m+k}{2} \pi + \cos \frac{i-m-k}{2} \pi \delta_{k,p-1}}{(i\pi - m\pi)^{k+1}} - \right.$$

$$\left. - (-1)^m \frac{\cos \frac{i+m+k}{2} \pi + \cos \frac{i+m-k}{2} \pi \delta_{k,p-1}}{(i\pi + m\pi)^{k+1}} \right\}.$$

Если $p=0$ (однородный сдвиг), то

$$\beta_{mi} = 2\xi_{0i} (1 - \delta_{m,i}) \left\{ \frac{\sin \frac{i-m}{2} \pi}{\pi(i-m)} - (-1)^m \frac{\sin \frac{i+m}{2} \pi}{\pi(i+m)} \right\}. \quad (2.3)$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным Ямаки [9.17]. В этом случае $\tilde{\lambda} = 1$. На рис. 18.2 показаны значения λ_p , вычисленные на ЭВМ методом итераций. В случае $p=1$ значения λ_p близки к результату, полученному С. Н. Кукуджановым [18.1].

Из полученных результатов видно, что неоднородность усилия приводит к существенному увеличению критического значения его амплитуды. Если ввести среднее значение усилия

$$S_c = \int_{-0.5}^{0.5} S^0 d\xi_1 = \frac{A_p}{p+1} \quad (2.4)$$

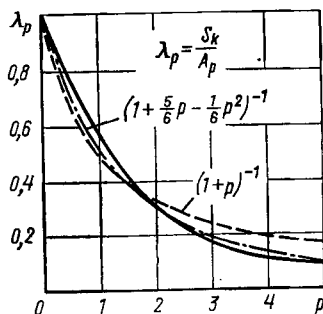


Рис. 18.2. Критическая величина λ_p при неоднородном кручении оболочки.

и приравнять его критическому усилию однородного сдвига S_b , то получим формулы:

$$A_p = S_b(p+1), \quad \lambda_p = (p+1)^{-1}. \quad (2.5)$$

Для $p=1, 2, 3, 4, 5$ отсюда имеем $\lambda_p = 0.5; 0.33; 0.25; 0.2; 0.165$. Кривая, соответствующая (2.5), на рис. 18.2 показана

пунктиром. Расчетные значения λ_p лежат несколько ниже этой кривой. Лучшее приближение дает формула

$$\lambda_p = \left(1 + \frac{5}{6}p - \frac{1}{6}p^2\right)^{-1}. \quad (2.6)$$

В полученном решении коэффициент β_{ml}^I , соответствующий слагаемому $S_x^0 w_y$ в уравнении (1.2), характеризует консервативность нагрузки. Роль этого коэффициента при местной потере устойчивости незначительна. При $p = 1, 2$ коэффициент обращается в нуль. В этих случаях в рамках статического критерия устойчивости решения для консервативной и следящей нагрузок совпадают.

Г л а в а XIX

ЛОКАЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ

§ 1. Радиальные усилия, приложенные по окружности

Возьмем бесконечно длинную оболочку (рис. 19.1) и приложим в ее середине распределенные по окружности сосредоточенные радиальные усилия. Прогибы в исходном состоянии определяются решением § 3 гл. VII уравнения осесимметричной задачи. Это решение должно быть затухающим на бесконечности и должно удовлетворять в середине оболочки ($x = 0$) граничным условиям симметрии:

$$w_x^0 = 0, \quad Q_1 = -Q/2. \quad (1.1)$$

В результате имеем прогиб

$$w^0 = \frac{\sqrt{3} h Q^*}{2 \sqrt{1 - \nu^2}} e^{-\mu |x|} (\cos \mu x + \sin \mu |x|) \quad (1.2)$$

и окружное усилие

$$T_2^0 = -\frac{Eh}{R} w^0, \quad (1.3)$$

здесь

$$Q = \frac{Q^* (1 - \nu^2)^{3/4}}{Eh} \left(\frac{R}{h}\right)^{3/2}, \quad \mu^4 = \frac{3(1 - \nu^2)}{R^2 h^2}. \quad (1.4)$$

На рис. 19.2 показана зависимость критического параметра Q^* от параметра η_m для свободно опертой оболочки, полученная Ю. В. Липовцевым [19.2] методом конечных разностей. При $\eta_m \geq 36$ критическое усилие не зависит от длины и равно критическому усилию бесконечно длинной оболочки $Q^* = 0,344$. Ве-

личина параметра окружных волн $\beta = 0,357$. Для случая, когда изменения кривизны оболочки в исходном состоянии не учитывались, получено $Q^* = 0,402$. Этот результат близок к результату $Q^* = 0,384$, полученному Л. И. Балабухом и В. М. Марченко методом интегральных уравнений.

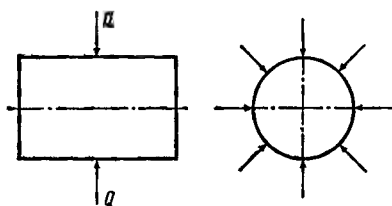


Рис. 19.1. Круговая цилиндрическая оболочка под действием радиальных усилий, приложенных по окружности.

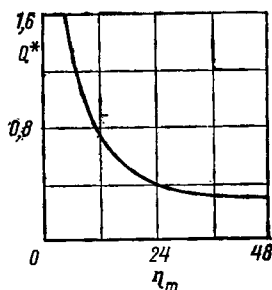


Рис. 19.2. Относительная величина критического радиального усилия.

Таким образом, критическое усилие для длинной оболочки определяется формулой

$$Q = 0,344 \frac{Eh}{(1 - \nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}. \quad (1.5)$$

Этот результат был получен также в работах [19.1, 19.4, 19.5].

§ 2. Краевые радиальные усилия и моменты

Пусть длинная оболочка нагружена по свободному краю радиальными усилиями Q и изгибающими моментами M (рис. 19.3). Прогибы в исходном состоянии определяются выражением

$$w^0 = \frac{2\sqrt{3}h}{\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\mu x} [Q^* \cos \mu x + M^* (\sin \mu x - \cos \mu x)], \quad (2.1)$$

$$Q^* = Q \frac{(1-\nu^2)^{3/4}}{Eh} \left(\frac{R}{h} \right)^{3/2}, \quad M^* = \frac{MR(1-\nu^2)}{Eh^3}. \quad (2.2)$$

Функция (2.1) удовлетворяет граничным условиям на свободном крае

$$M_1 = M, \quad Q_1 = -Q. \quad (2.3)$$

Рассмотрим сначала случай действия только радиальных усилий. На рис. 19.4 показаны результаты [19.4] для случая граничных условий $S5 - C4$ в нейтральном состоянии (сплошная линия — точное решение, пунктир — без учета искривлений образующих в исходном состоянии). При $Z_m > 15$ величина Q^*

не зависит от Z_m . Оболочку в этом случае можно считать полубесконечной. При этом $Q^* = 0,120$. Без учета искривлений образующих $Q^* = 0,104$. Интересно отметить, что рассмотренный случай по влиянию искривлений образующих противоположен

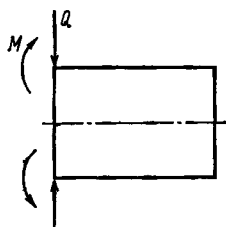


Рис. 19.3. Круговая цилиндрическая оболочка под действием краевых радиальных усилий и моментов.

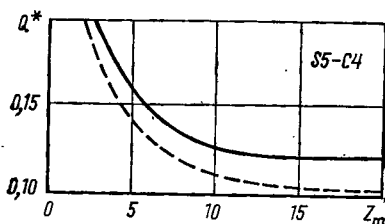


Рис. 19.4. Относительная величина критического краевого радиального усилия

случаю приложения радиальных сил в середине оболочки. Приведем результаты Ю. В. Липовцева и Э. Б. Шварца [19.3], полученные для других вариантов граничных условий ($\eta_m \geq 20$):

S1	S2	S3	S4	C1	C2	C3	C4
$Q^* = 6,46$	—	7,6	8,55	3,21	3,2	3,29	3,29

В случае действия только изгибающих моментов ($Q^* = 0$) параметр $M^* = 0,164$ при $Z_m \geq 5$. Без учета искривлений образующих $M^* = 0,192$.

Г л а в а XX

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ НАГРУЗОК

§ 1. Осевое сжатие, краевые моменты и радиальные усилия, приложенные по окружности

Возьмем свободную опертую оболочку, нагруженную по краям осевыми усилиями сжатия и изгибающими моментами (рис. 20.1). Эта задача рассматривалась В. И. Мячковым [20.7]. Результаты расчетов для оболочек с параметром $Z_m \geq 20$ показаны на рис. 20.2. В нейтральном состоянии выполнялись граничные ус-

ловия S3. Штрихпунктирной линией показано решение для случая, когда исходное состояние определялось по уравнению линейного краевого эффекта.

Отметим, что к рассмотренному случаю можно от-

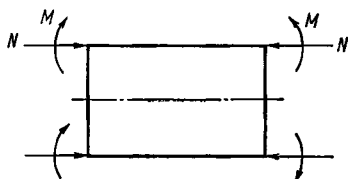


Рис. 20.1. Круговая цилиндрическая оболочка под действием осевого сжатия и краевых моментов

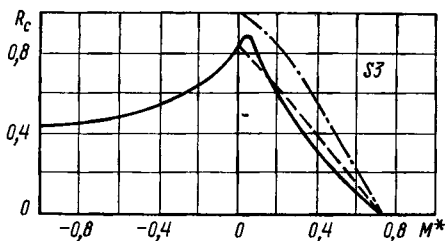


Рис. 20.2. Относительные критические значения сжимающего усилия и краевых моментов свободно опертой оболочки.

нести и случай нагружения свободно опертой оболочки осевыми усилиями, приложенными с эксцентриситетом e относительно срединной поверхности. При этом $M = Ne$. Приведем значе-

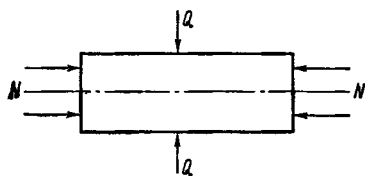


Рис. 20.3. Круговая цилиндрическая оболочка под действием осевого сжатия и радиальных усилий

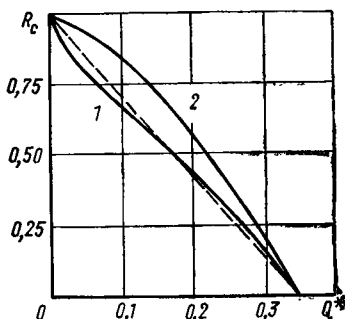


Рис. 20.4. Относительные критические значения сжимающего осевого усилия и радиального усилия, приложенного по окружности.

ния N^* в зависимости от e/h , полученные Ю. В. Липовцевым и Э. Б. Шварцем [20.5]:

$e/h = 0$	0,1	2	4	8	12
$N^* = 0,84$	0,9	0,51	0,34	0,20	0,15

Возьмем бесконечно длинную оболочку и нагрузим ее равномерным осевым сжатием и радиальными усилиями по окружно-

сти среднего сечения (рис. 20.3). Кривые взаимодействия нагрузок, полученные в работе [20.7], показаны на рис. 20.4. Кривая 1 — точное решение, кривая 2 — решение, в котором исходное состояние оболочки определялось по линейной теории краевого эффекта. Отметим, что решение этой задачи получено также и в работах [20.5, 20.6].

§ 2. Изгиб моментом и внешнее давление

В случае изгиба моментом оболочки, находящейся под действием однородного поперечного внешнего давления, в ней

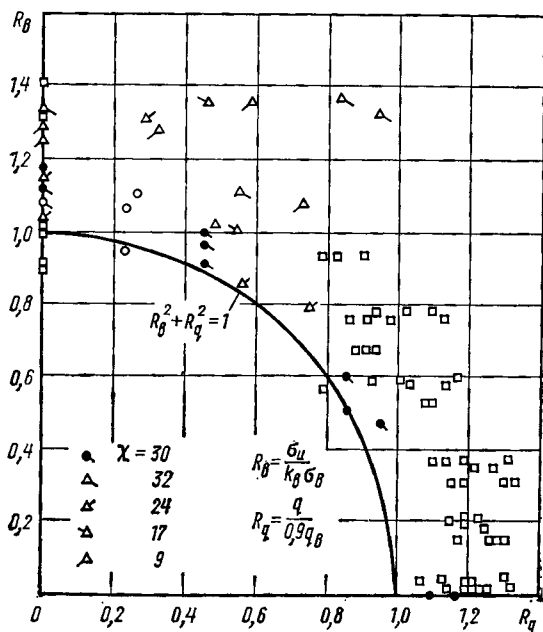


Рис. 20.5. Экспериментальные относительные критические значения внешнего давления и амплитуды сжимающего напряжения от изгиба моментом

возникают продольные и окружные усилия. Если считать исходное состояние безмоментным, то

$$T_1^0 = -A \cos \varphi, \quad T_2^0 = -qR, \quad A = \frac{M}{\pi R^2 h}. \quad (2.1)$$

Исследовать устойчивость свободно опертой оболочки в этом случае можно так же, как и в случае чистого изгиба. В решении § 1 гл. XII изменится только коэффициент α_n

$$\alpha_n = q_1 + \frac{1}{q_1} + \frac{n^2}{\lambda^2} P^*, \quad P^* = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{P}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2. \quad (2.2)$$

С запасом кривую взаимодействия нагрузок, как и в случае совместного действия осевого сжатия и внешнего давления, можно представить прямой

$$R_b + R_q = 1. \quad (2.3)$$

На рис. 20.5 представлены результаты экспериментов

$$R_b = \frac{\sigma_k}{k_b \sigma_b}, \quad R_q = \frac{q}{0,9 q_b}, \quad (2.4)$$

где k_b взято согласно (1.1) гл. XII, q_b — по формуле Саутуэлла — Папковича. Хорошей нижней границей для всех экспериментальных точек служит окружность

$$R_b^2 + R_q^2 = 1. \quad (2.5)$$

В эксперименте Л. В. Андреева [20.1] (квадратики на рис. 20.5) испытывались оболочки, изготовленные из листовой стали Х18Н9Т. Сначала прикладывался изгибающий момент, потом давалось давление до потери устойчивости оболочки. В экспериментах В. В. Кабанова (треугольники на рис. 20.5) и П. Г. Бурдина (темные точки) испытывались точечные дюралюминиевые оболочки. При испытаниях сначала создавалось внешнее давление, потом прикладывался изгибающий момент. В эксперименте В. В. Кабанова характерно наличие двух областей расположения экспериментальных точек. Первая область с малыми значениями R_b , лежащими близко к кривой $R_b^2 + R_q^2 = 1$, показывает на снижение R_b с ростом давления. В другой области значения R_b с ростом давления или не уменьшаются, или даже возрастают. Объяснить этот на первый взгляд кажущийся противоречивый факт можно следующим. Влияние внешнего давления проявляется двояким образом. Во-первых, давление вызывает дополнительные сжимающие мембранные продольные и окружные напряжения, которые способствуют потере устойчивости, снижая величину критического момента. Во-вторых, в

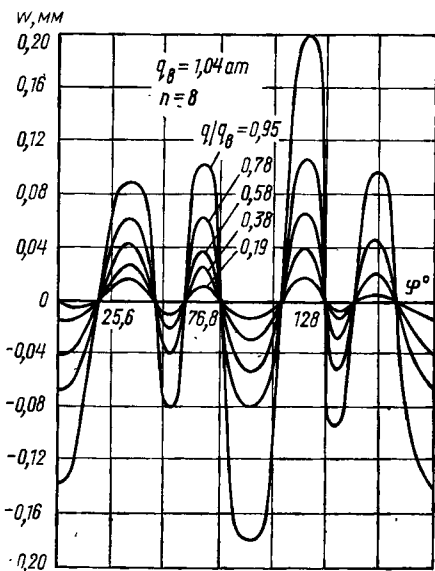


Рис. 20.6. Развитие прогибов в процессе деформирования оболочки внешним давлением.

Первая область с малыми значениями R_b , лежащими близко к кривой $R_b^2 + R_q^2 = 1$, показывает на снижение R_b с ростом давления. В другой области значения R_b с ростом давления или не уменьшаются, или даже возрастают. Объяснить этот на первый взгляд кажущийся противоречивый факт можно следующим. Влияние внешнего давления проявляется двояким образом. Во-первых, давление вызывает дополнительные сжимающие мембранные продольные и окружные напряжения, которые способствуют потере устойчивости, снижая величину критического момента. Во-вторых, в

реальных оболочках, как правило, имеющих начальные непряильности, наблюдаются значительные изгибы в докритическом состоянии. На рис. 20.6 показаны результаты замеров прогибов в оболочке ($L/R = 2,1$, $R/h = 175$), нагруженной только внешним давлением.

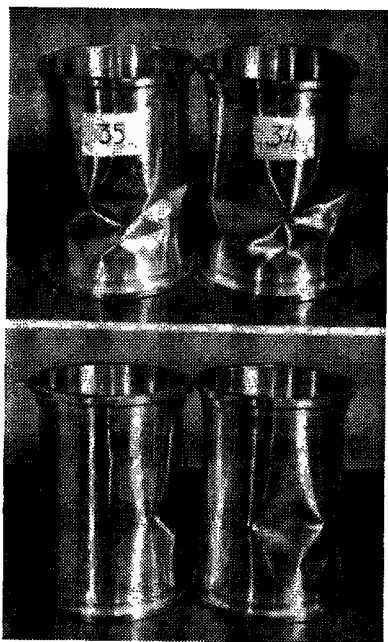


Рис. 20.7. Форма потери устойчивости оболочек при изгибе моментом и внешнем давлении.

Если на оболочку действуют еще и другие нагрузки, то докритическая изгибная форма может, в зависимости от свойств оболочки и вида нагрузки, соответствовать (находиться в «фазе») или не соответствовать (находиться в «противофазе») основной форме потери устойчивости идеальной оболочки. В первом случае докритический изгиб будет способствовать потере устойчивости, во втором случае — наоборот.

При изгибе моментом основная форма потери устойчивости имеет вмятины с центрами в плоскости действия момента, т. е. по линии действия наибольших нормальных напряжений. Если гребень волны докритической деформации окажется тоже на этой линии, то для перестройки такой исходной формы оболочки потребуется большая величина момента, чем для потери устойчи-

вости оболочки без давления. Вероятно, это и имело место при деформации оболочек, значения R_b которых получились выше единицы. На рис. 20.7 показаны формы двух потерявших устойчивость оболочек. Оболочка 35 имела соответствующую основной форме потери устойчивости докритическую деформацию. Значения R_b для нее получились низкими. У оболочки 34 по линии действия максимальных нормальных напряжений был гребень докритической деформации. Вмятины образовались в зоне действия средних по величине нормальных напряжений. Значения R_b получились высокими. Предположение о взаимодействии докритической и основной форм потери устойчивости подтверждают и осциллограммы процесса потери устойчивости. У оболочек первой группы хлопки были менее интенсивными, падение нагрузки значительно меньше, чем у оболочек второй

группы, для которых $R_b > 1$. Это свидетельствует о том, что для перестройки докритической формы оболочек второй группы приходилось преодолевать значительно больший энергетический барьер, что и привело к увеличению критического момента.

Подмеченный интересный факт характерен для задач устойчивости при неоднородных напряженных состояниях. Для таких задач, по-видимому, история нагружения будет оказывать влияние на устойчивость оболочек.

§ 3. Изгиб, внешнее давление и кручение

Нагрузим консольно закрепленную оболочку поперечной силой Q и внешним давлением q (рис. 20.8).

В случае безмоментного исходного состояния решение этой задачи незначительно отличается от решения § 1 гл. XIII для случая действия только одной поперечной силы. К усилиям безмоментного состояния добавляется постоянное окружное усилие $T_2^0 = -qR$, в связи с чем в решении меняется коэффициент α_{mn} , который будет иметь вид (2.2).

На рис. 20.9, 20.10 показаны результаты экспериментов П. Г. Бурдина (темные точки) и В. В. Кабанова (светлые точки), в которых испытывались точеные дюралюминиевые оболочки. При испытаниях сначала создавалось внешнее давление с помощью разрежения во внутренней полости оболочки, потом прикладывалась сила. Оболочки при изгибе силой с внешним давлением теряют устойчивость хлопком.

Форма потери устойчивости меняется как в зависимости от геометрии оболочки, так и от сочетания величин силы и внешнего давления. С увеличением давления наблюдается постепенный переход от формы потери устойчивости, характерной для изгиба, к форме, характерной для внешнего давления.

На рис. 20.9 $R_\tau = Q/(0,8Q_\tau) = \tau_d/(0,8\tau_b)$, где τ_d — амплитуда касательного напряжения. На рис. 20.10 $R_\tau = Q/(0,8Q_b)$, где Q_b — верхнее критическое значение силы согласно § 1 гл. XIII. Имеется большой разброс экспериментальных точек и сильная зависимость кривых взаимодействия от геометрического параметра χ . Все это затрудняет рекомендовать какую-либо из кривых взаимодействия. Надежной следует считать прямую линию. В работе [11.16] рекомендована зависимость

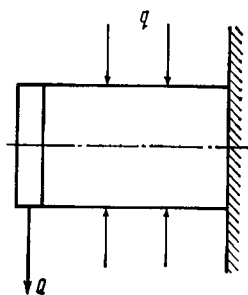


Рис. 20.8 Круговая цилиндрическая оболочка под действием внешнего давления и поперечной силы.

$$R_d^2 + R_q = 1. \quad (3.1)$$

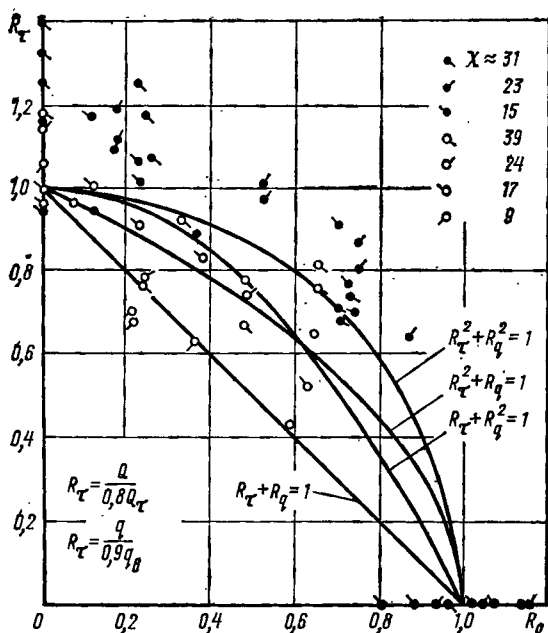


Рис 20.9. Относительные критические значения напряжений от внешнего давления и амплитуды касательных напряжений от изгиба силой.

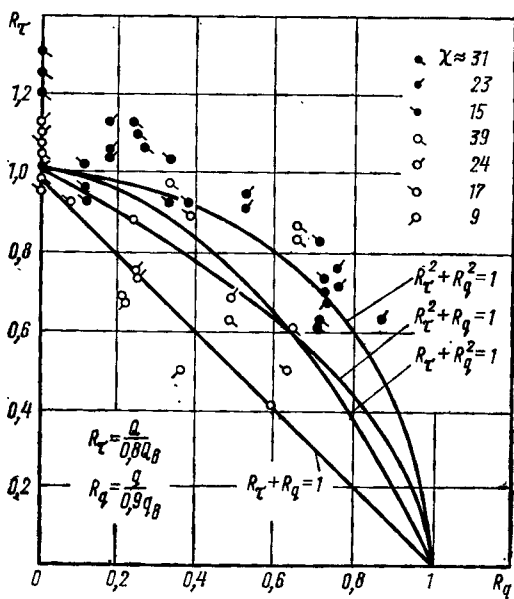


Рис. 20.10. Относительные критические значения напряжений от внешнего давления и амплитуды касательных напряжений от изгиба силой.

Рассмотрим оболочку под действием изгибающих и крутящих моментов, приложенных по краям. Этот случай можно исследовать с помощью алгоритма решения в рядах, изложенного в гл. VI. Если исходное состояние принять безмоментным, то для мембранных усилий будем иметь такие выражения:

$$T_1^0 = -A \cos \varphi, \quad S^0 = \frac{M_K}{2\pi R^2},$$

$$A = \frac{M}{\pi R^2 h}. \quad (3.2)$$

В работе [20.8] рекомендована зависимость

$$R_b + R_t^2 = 1. \quad (3.3)$$

Эта оценка является заниженной. Верхнюю границу дает зависимость

$$R_b^2 + R_t^2 = 1. \quad (3.4)$$

В свою очередь зависимость

$$R_b^{3/2} + R_t^2 = 1 \quad (3.5)$$

занимает промежуточное положение.

Результаты экспериментов [20.8] приведены на рис. 20.11. Здесь же нанесены зависимости (3.3) — (3.5).

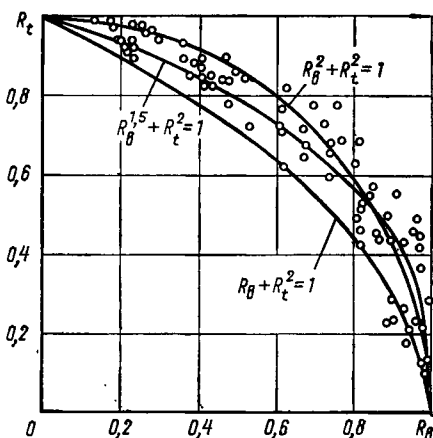


Рис. 20.11. Экспериментальные критические значения относительных касательных напряжений и амплитуды сжимающих напряжений от изгиба моментом.

§ 4. Изгиб силой с кручением и внутренним давлением

Рассмотрим задачу устойчивости консольно закрепленной круговой цилиндрической оболочки, имеющей на свободном крае жесткий шпангоут, к которому приложены поперечная сила Q и крутящий момент M_K (рис. 20.12). Оболочка нагружена внутренним давлением. Докритическое напряженное состояние оболочки определим по безмоментной теории. Продольные, сдвигающие и окружные усилия имеют вид

$$T_1^0 = S_0 \xi \cos \varphi + \frac{PR}{2}, \quad T_2^0 = PR, \quad S^0 = S_m - S_0 \sin \varphi, \quad (4.1)$$

где

$$S_0 = \frac{Q}{\pi R}, \quad S_m = \frac{M_K}{2\pi R^2}. \quad (4.2)$$

Решение уравнения устойчивости

$$\Phi = k_2^2 D \nabla^4 w + E h \nabla^4 w_{\xi\xi\xi\xi} - T_1^0 w_{\xi\xi} - T_2^0 w_{\varphi\varphi} - 2 S^0 w_{\xi\varphi} = 0 \quad (4.3)$$

отыскиваем в форме двойного тригонометрического ряда

$$w = \sum_{m, n} \sin \lambda \xi (C_{mn} \cos n\varphi + B_{mn} \sin n\varphi). \quad (4.4)$$

Функция (4.4) удовлетворяет граничным условиям свободного опирания. Используя метод Бубнова, приходим к двум системам уравнений

$$\tilde{\lambda} C_{mn} \alpha_{mn} - \sum_{i, k} (C_{ik} \beta_{mn}^{ik} + B_{ik} \tilde{\lambda} S_* \chi_{mn}^{ik}) = 0, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\lambda} B_{mn} \alpha_{mn} - \sum_{i, k} (B_{ik} \beta_{mn}^{ik} - C_{ik} \tilde{\lambda} S_* \chi_{mn}^{ik}) = 0. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} = (1 + \delta_{n,0}) \frac{\pi \lambda k_2^2 D}{2S_B} \left\{ \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} + \right. \\ \left. + \frac{12(1 - \nu^2)}{k_2^2 h^2} \left[\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{P^* h k_2}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} \left(\frac{1}{2} + \frac{n^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\}, \\ S_* = \frac{S_m}{S_B}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{S_B}{S_0}, \quad S_B = 0,74 \frac{Eh}{(1 - \nu^2)^{5/8}} \frac{h}{R} \left(\frac{Rh}{L^2} \right)^{1/4}, \\ P^* = \sqrt{12(1 - \nu^2)} \frac{P}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2, \quad \chi_{mn}^{ik} = 2b_{mi} \frac{k_i}{m^2 - i^2} \delta_{n,k}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$b_{mi} = 1 - (-1)^{m+i},$$

$$\begin{aligned} \beta_{mn}^{ik} = (1 - \delta_{m,i}) \frac{ib_{mi}}{m^2 - i^2} \left\{ \left[k(k - n) + \frac{i^2}{m^2 - i^2} \right] \delta_{|n-k|, 1} + \right. \\ \left. + \left[k + \frac{i^2}{m^2 - i^2} \right] \delta_{k+n, 1} \right\} - \delta_{m,i} \frac{\pi^2}{8} m (\delta_{|k-n|, 1} + \delta_{k+n, 1}), \end{aligned}$$

$\delta_{i,j} = 1$ при $i=j$, $\delta_{i,j} = 0$ при $i \neq j$, S_B — верхнее критическое усилие сдвига при кручении. В матричной форме систему уравнений (4.6) можно записать в виде

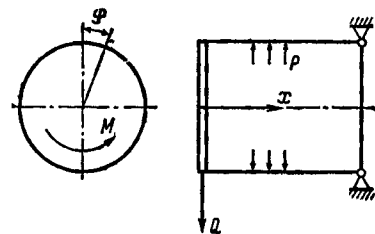
$$\begin{aligned} (A_1 - \tilde{\lambda} I) C + \tilde{\lambda} S_* A_2 B = 0, \\ (A_1 - \tilde{\lambda} I) B - \tilde{\lambda} S_* A_2 C = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} I = [1], \quad A_1 = [a_{mn}^{ik}], \\ A_2 = [b_{mn}^{ik}], \quad C = [C_{mn}], \\ B = [B_{mn}], \quad a_{mn}^{ik} = \frac{\beta_{mn}^{ik}}{\alpha_{mn}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$b_{mn}^{ik} = \frac{\chi_{mn}^{ik}}{\alpha_{mn}}.$$

Рис. 20.12. Круговая цилиндрическая оболочка под действием кручения, внутреннего давления и поперечной силы.



Таким образом, задача сведена к нахождению собственных чисел и собственных векторов системы (4.8). При $S_* = 0$ имеем

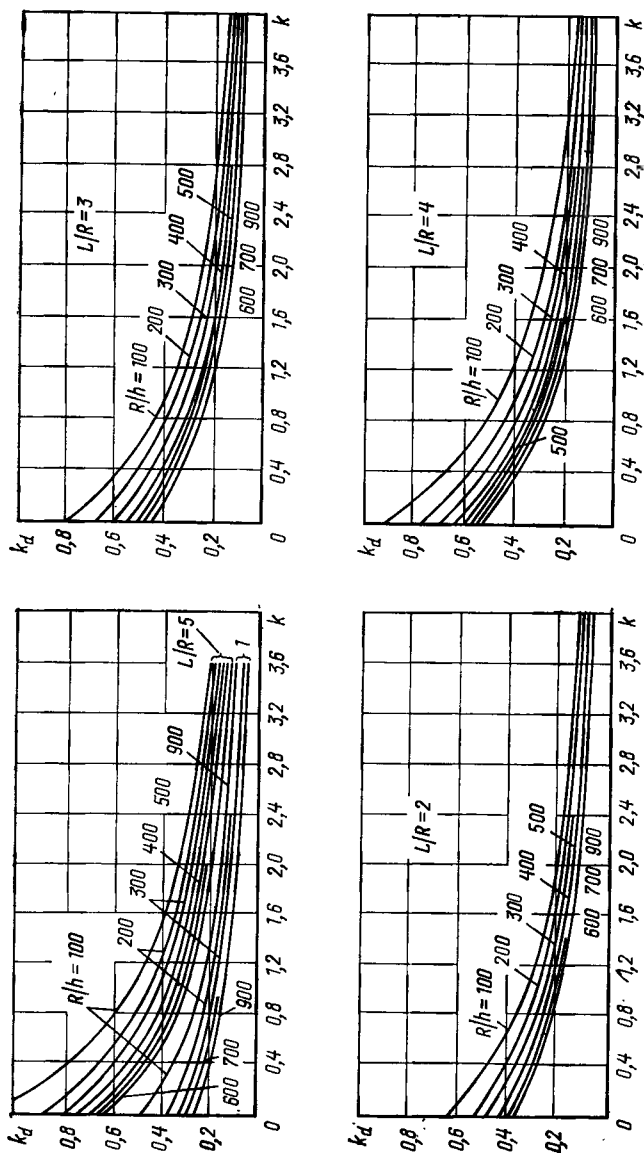


Рис. 20.13. Относительные критические значения касательных напряжений от кручения и амплитуды сжимающих напряжений от изгиба силой.

случай изгиба силой с внутренним давлением. Система (4.8) распадается на две системы

$$(A_1 - \tilde{\lambda}I)C = 0, \quad (4.10)$$

$$(A_1 - \tilde{\lambda}I)B = 0 \quad (4.11)$$

соответственно для симметричной и кососимметричной форм потери устойчивости. Системы (4.10), (4.11) отличаются первыми

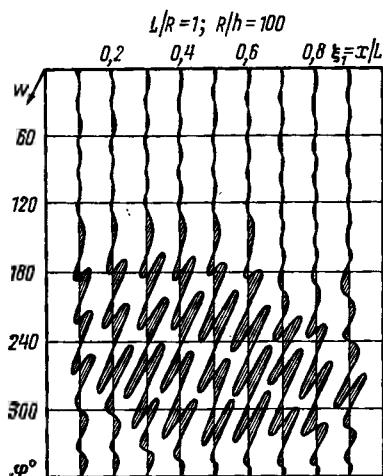


Рис. 20.14. Форма потери устойчивости оболочки при действии крутящего момента и поперечной силы

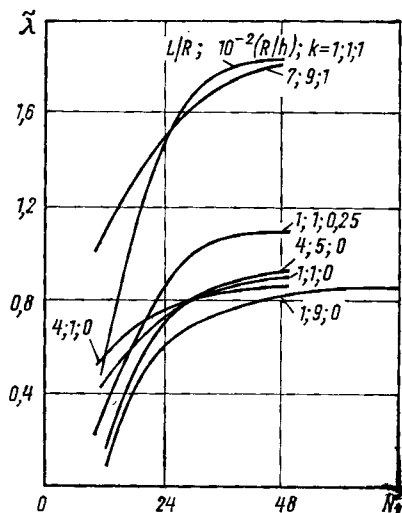


Рис. 20.15. Характер сходимости собственных значений.

уравнениями ($n = 0$). Это различие несущественно, так как член ряда с $n = 0$ не является главным. Поэтому в расчетах можно использовать любую из систем. Система (4.10) была исследована в гл. XIII.

В случае $P^* = 0$ имеем изгиб силой с кручением. Систему уравнений (4.8) при этом можно представить в виде

$$(Y - \tilde{\lambda}I)X = 0, \quad (4.12)$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} A_1 & A_2' \\ -A_2' & A_1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} C_{mn} \\ B_{mn} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$A_2' = kA_2, \quad k = S_* \tilde{\lambda} = -\frac{S_m}{S_0} = \frac{M}{2RQ}. \quad (4.14)$$

При $k = 0$ имеем изгиб силой, при $k = \infty$ — кручение моментом, при $0 < k < \infty$ — комбинированное нагружение. Задача отыскания критических параметров

$$S_0 = -\frac{S_B}{\bar{\lambda}}, \quad S_m = \frac{kS_B}{\bar{\lambda}} \quad (4.15)$$

свелась к нахождению наибольшего собственного числа $\bar{\lambda}$ матрицы Y . Собственный вектор X позволяет определить прогибы.

Результаты расчетов показаны на рис. 20.13—20.15. Расчеты производились по программе, в которой был реализован алгоритм выбора главных членов ряда, изложенный в гл. VI. На рис. 20.13 приведены графики значений $k_d = \sigma_d/\sigma_B$ для различных значений R/h , L/R , k (σ_d — амплитуда сжимающего осевого напряжения, σ_B — верхнее критическое напряжение). На рис. 20.14 на развертке оболочки показана форма потери устойчивости. Прогибы локализуются на боковой стороне, где направления сдвигающих усилий от поперечной силы и крутящего момента совпадают. На рис. 20.15 показаны типичные кривые сходимости $\bar{\lambda}$ по порядку матрицы.

Г л а в а XXI

ТЕМПЕРАТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

Проблема устойчивости оболочек при температурных воздействиях — сравнительно новый раздел в общей теории устойчивости оболочек. Эта проблема стала разрабатываться с 1957 г. Термическое выпучивание в отличие от выпучивания при действии механических нагрузок имеет ряд специфических особенностей.

Температурные напряжения возникают в результате теплового расширения элементов оболочки и в принципе зависят от деформаций в момент потери устойчивости. Возникновение этих деформаций должно приводить к снижению температурных усилий. В процессе деформации меняется температура. Сжатие элементов сопровождается выделением тепла, растяжение — поглощением. В оболочке имеет место перетекание тепла от сжатых элементов к растянутым. При неравномерном нагреве из-за градиентов температур возникают дополнительные внутренние тепловые потоки. Происходит необратимый теплообмен с окружающей средой. Строгое решение задачи о температурном выпучивании возможно лишь термодинамическими методами. Однако в работах [21.14, 21.20] показано, что критическое состояние упругой системы в рамках линейной теории устойчивости не зависит от природы исходного поля напряжений.

В этих работах установлено, что зависимость температурных напряжений от деформаций выпучивания является слабой, эффекты от ее учета имеют второй порядок малости. Поэтому допускается чисто механическая трактовка термического выпучивания, в которой не делается различия между температурными напряжениями и напряжениями от внешних нагрузок. В этом случае используются все схемы решений, разработанные для внешних нагрузок. В линейных задачах при таком подходе с температурой приходится иметь дело только на первом этапе, когда вычисляются температурные напряжения и деформации исходного состояния.

§ 1. Равномерный нагрев. Безмоментное состояние

При равномерном нагреве оболочек температурные напряжения возникают только за счет стеснения оболочки опорами. В классической постановке, когда опоры в исходном состоянии не препятствуют радиальному расширению оболочки, напряжения возникают только за счет ограничения продольных смещений. Если оболочка не имеет возможности удлиняться, то в ней возникнут напряжения

$$\sigma_1 = E\alpha_t t. \quad (1.1)$$

Приравнивая эти напряжения критическому напряжению сжатия ненагретой оболочки, получим величину критической температуры

$$t = \frac{\sigma_c}{E\alpha_t} = \frac{hk_t}{R\alpha_t \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (1.2)$$

Если σ_c равно верхнему классическому напряжению σ_b , то $k_t = 1$ и тогда

$$t = t_b = \frac{h}{\alpha_t R \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (1.3)$$

Эту температуру можно считать, по аналогии с осевым сжатием, классической верхней критической температурой. В эксперименте [21.25] критическая температура составляла 62% от температуры t_b . При этом критические напряжения σ_1 составляли 96% от σ_b . Такая непропорциональность расхождения эксперимента с расчетом по температуре и напряжению объясняется нелинейной зависимостью напряжения от температуры в исходном состоянии (зависимость (1.1) в экспериментах не выполняется). Если оболочка не стеснена в продольном направлении, то при классической постановке в ней не возникнут напряжения. В действительности же за счет разницы в температурах и коэффициентах расширения материала оболочки и опор в оболочке с начала нагружения возникает моментное напряженное состоя-

ние. Прогибы исходного состояния в линейной задаче определяются уравнением (3.1) гл. VII. Ниже обсуждаются решения ряда задач, полученные с учетом моментности исходного состояния.

§ 2. Оболочка с краевыми шпангоутами

Рассмотрим нагретую до температуры

$$t(x) = t \left(1 - e^{-\frac{\mu x}{\gamma}} \right), \quad \mu^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{(R\hbar)^2} \quad (2.1)$$

оболочку, имеющую по краям жесткие шпангоуты с нулевой температурой. Начало координаты x поместим на шпангоуте. Распределение температуры (2.1) характерно для равномерно нагреваемых оболочек, имеющих ненагретые шпангоуты. Будем считать оболочку достаточно длинной, чтобы краевые эффекты не перекрывались. Прогиб, изменение кривизны образующих и окружные усилия в исходном состоянии половины оболочки определяются выражениями

$$\begin{aligned} w^0 &= \alpha_t R t \left(\frac{1}{2} f_0 - 1 \right), \quad \chi_1^0 = -k_2 k_t f_2, \\ T_2^0 &= -\frac{E h \alpha_t t}{2} f_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= 2 [e e^{-k\eta} (\cos k\eta + \alpha_3 \sin k\eta) + d_1 e^{-c_1\eta}], \\ f_1 &= 2e [e^{-k\eta} (\cos k\eta + \alpha_3 \sin k\eta) - e^{-c_1\eta}], \\ f_2 &= 2e [e^{-k\eta} (\alpha_3 \cos k\eta - \sin k\eta) - 2\gamma^2 e^{-c_1\eta}], \\ e &= \frac{1}{1+4\gamma^4}, \quad \eta = \frac{x}{\theta}, \quad \theta^2 = \frac{hR}{\sqrt{12}(1-\nu^2)}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ k_t &= \frac{t}{t_b}, \quad t_b = \frac{h}{\alpha_t R \sqrt{3}(1-\nu^2)}, \quad d_1 = \frac{4\gamma^4}{1+4\gamma^2}, \quad c_1 = \frac{k}{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При свободном опирании на шпангоут ($w^0 = w_{xx}^0 = 0$) $\alpha_3 = 2\gamma^2$, при защемлении на шпангоуте ($w^0 = w_x^0 = 0$) $\alpha_3 = 1 + 4\gamma^3$. Графики функций f_1, f_2 при $\gamma = 0$ (температурный скачок) показаны на рис. 21.1 сплошными (защемленная оболочка) и пунктирными (опертая оболочка) линиями. Исследуем устойчивость оболочки при $\gamma = 0$ с помощью разностного алгоритма, приведенного в гл. VI. В нейтральном состоянии рассмотрим варианты граничных условий S3, C3 (табл. 9.1) при $x = 0$, соответствующие классическому случаю свободного опирания и неполному защемлению. В середине оболочки выполним условие затухания напряженно-деформированного состояния, приняв $M_m = 0$. В результате расчетов (см. [21.4]) для свободно

опертой оболочки при $\eta_m = 15$, $m = 220$ получено $k_t = 34,6$ и $\beta = 3,6$, для защемленной оболочки — $k_t = 7,37$ и $\beta = 1,52$, Сходимость значений k_t показана ниже:

для защемленной оболочки —

$m = 80$	100	140	160	200	220
$k_t = 7,24$	7,28	7,33	7,345	7,37	7,37

для опертой оболочки —

$m = 40$	80	120	200	220
$k_t = 30,5$	33,5	34,3	34,6	34,6

Значения β с изменением числа m точек разбиения почти не изменяются. Без учета искривлений образующих получено $k_t = 8,85$, $\beta = 1,1$ и $k_t = 5,585$, $\beta = 1,05$ соответственно для опертой и защемленной оболочки.

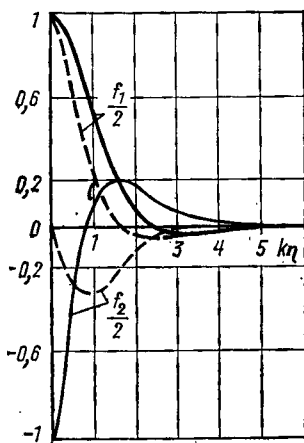


Рис. 21.1. Характер изменения по длине оболочки окружных температурных усилий и изменения кривизны образующих.

Учет искривлений образующих приводит к увеличению критической температуры, что объясняется стабилизирующим эффектом искривлений. Для свободно опертой оболочки критическая температура значительно выше, чем для защемленной. Это объясняется, во-первых, тем, что суммарная площадь эпюры сжимающих напряжений у нее примерно в два раза меньше, чем у защемленной оболочки (рис. 21.1), во-вторых, тем, что искривление образующих при свободном опирании больше. Учет искривлений образующих приводит и к изменению формы потери устойчивости, особенно в случае свободного опирания по краям. Число окружных волн с увеличением степени искривления существенно возрастает.

Отметим некоторые результаты, полученные ранее без учета искривлений образующих соответственно для опертой и защемленной оболочек:

	Работы	[16,13]	[21,22]	[21,17]	[16,14]	[20,4]	[21,10]
k_t	опирание	8,5	—	—	8,25	8,04	9,51
	защемление	—	10	5,6	10,4	6,28	5,59

Другие варианты граничных условий рассмотрены в работе [21,12]. На рис. 21.2 кривой 1 показана зависимость $k_t/\sqrt{3}$ от параметра Z_m , полученная в [21,12] при граничных условиях С4.

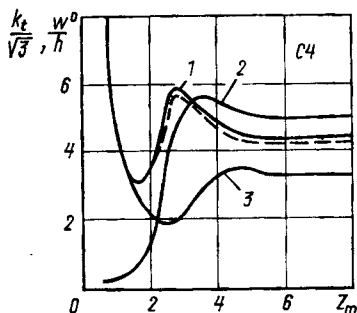


Рис. 21.2. Относительные величины прогиба в исходном состоянии и критической температуры защемленной оболочки.

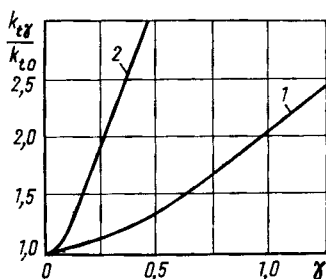


Рис. 21.3. Относительное окружное усилие в зависимости от параметра γ .

Осциллирующий характер кривой объясняется перестройкой формы потери устойчивости с изменением Z_m . Кривой 2 показано отношение амплитуды прогиба w^0 к толщине оболочки, кривая 3 соответствует решению без учета искривлений образующих.

На рис. 21.3 кривой 1 показана зависимость $k_{t\gamma}/k_{t0}$ от параметра γ для защемленной оболочки (граничное условие С4), полученная в работе [21,12].

§ 3. Оболочка, подкреплённая шпангоутами

В этом случае наличие соседних отсеков (рис. 21.4) обуславливает защемление оболочки на шпангоутах в исходном состоянии. В нейтральном состоянии следует рассмотреть как защемление, так и опирание на шпангоуты. Первый случай ничем не отличается от разобранных выше, где рассматривалась защемленная оболочка с краевыми диафрагмами. Решение для второго

случая можно получить так же, как и для свободно опертой оболочки, если исходное состояние (функции f_1, f_2) взять для защемленной оболочки. При $\gamma = 0, \eta_m = 15, m = 220$ В. В. Кабановым [21.4] получено $k_t = 4,55, \beta = 1,15$. Сходимость значений k_t имеет вид

$m = 80$	100	160	200	220
$k_t = 3,95$	4,20	4,45	4,55	4,55

Без учета искривлений образующих — $k_t = 3,475, \beta = 0,85$, что находится в соответствии с результатом $k_t = 3,48$ (см. [21.17]).

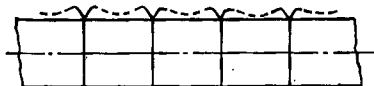


Рис. 21.4. Круговая цилиндрическая оболочка, подкрепленная шпангоутами.

Таким образом, критические температуры оболочки, подкрепленной в середине шпангоутом, значительно ниже критических температур оболочки с краевыми шпангоутами. Зависимость $k_{t\gamma}/k_{t\gamma_0}$ от параметра γ , полученная в [21.12], показана кривой 2 на рис. 21.3.

Зависимость $k_{t\gamma}/k_{t\gamma_0}$ от параметра γ , полученная в [21.12], показана кривой 2 на рис. 21.3.

§ 4. Неравномерный нагрев по длине

Рассмотрим бесконечно длинную оболочку (рис. 21.5), нагретую по закону

$$t(x) = \frac{t}{2} \left[1 + \left(1 - e^{-\frac{\mu |x|}{\gamma}} \right) \operatorname{sign} x \right], \quad (4.1)$$

где

$$\mu^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2},$$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

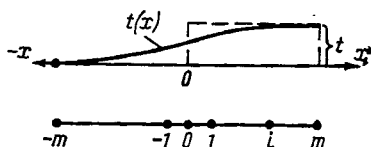


Рис. 21.5. Схема узлов по образующей оболочки при расчете ее методом конечных разностей.

Начало координаты x помещено в середине оболочки. Температура (4.1) характерна для равномерно нагреваемых оболочек, частично заполненных жидкостью, имеющей равную нулю температуру. Параметр γ характеризует изменение температуры по длине. При $\gamma = 0$ имеет место скачок температуры $t(x) = t$ при $x > 0, t = 0$ при $x < 0$. При $\gamma = \infty$ оболочка равномерно нагрета до температуры $t/2$.

Решение уравнения (3.1) гл. VII в этом случае можно записать в виде

$$w^0 = w_+ + \begin{cases} e^{-\mu x} A_1 \cos \mu x + A_2 \sin \mu x, & x > 0, \\ e^{\mu x} A_3 \cos \mu x + A_4 \sin \mu x, & x < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где

$$w_+ = -\frac{hk_t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[1 + \left(1 - \frac{4\nu^4}{1+4\nu^4} e^{-\frac{\mu|x|}{\nu}} \right) \operatorname{sign} x \right] \quad (4.3)$$

— частное решение уравнения.

Постоянные A_i определяются из условий стыковки левой и правой части оболочки при $x = 0$

$$w^+ = w^-, \quad w_x^+ = w_x^-, \quad w_{xx}^+ = w_{xx}^-, \quad w_{xxx}^+ = w_{xxx}^-.$$

В результате решения этой системы получаем

$$w^0 = -\frac{hk_t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left\{ \left[1 - e^{-\frac{\mu|x|}{\nu}} (\cos \mu x + 2\nu^2 \sin \mu|x|) \frac{1}{1+4\nu^4} - \frac{4\nu^4}{1+4\nu^4} e^{-\frac{\mu|x|}{\nu}} \right] \operatorname{sign} x + 1 \right\}. \quad (4.4)$$

Устойчивость оболочки исследуем разностным методом. Графики функций f_1 , f_2 для случая $\nu = 0$ (температурный скачок) показаны на рис. 21.6. В результате расчетов критической температуры оболочки, имеющей $\eta_m = 10$, получены [6.12] при $m = 800$ значения $k_t = 32,5$, $\beta = 2,33$. Без учета искривлений образующих — $k_t = 7,82$, $\beta = 0,7$. Ранее в работе [21.5] для последнего случая было получено $k_t = 7,6$, $\beta = 0,68$. Характер сходимости значений k_t , β показан ниже:

$m = 150$	300	600	800
$\beta = 2,08$	2,245	2,33	2,33
$k_t = 28$	31,13	32,4	32,5

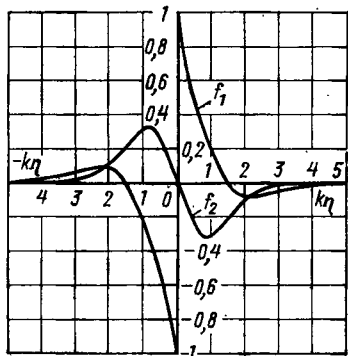


Рис 21.6. Характер неоднородности окружных температурных усилий и изменения кривизны образующих неравномерно нагретой по длине оболочки

Таким образом, учет искривлений образующих и в этом случае существенно повышает устойчивость оболочки.

Во всех рассмотренных задачах критические значения параметра k_t получились большими, так что чисто температурная

потеря устойчивости возможна у очень тонких оболочек. Наиболее опасен случай нагрева оболочки, подкрепленной несколькими шпангоутами ($k_t = 4,55$). При этом критическая температура равна

$$t = k_t \frac{h}{\alpha_t R} \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}.$$

Если, например, взять дюралюминиевую оболочку ($\alpha_t = 2,3 \cdot 10^{-5}$, $\nu = 0,33$) с $R/h = 500$, то получим $t = 240^\circ \text{C}$.

Экспериментальные данные по температурной потере устойчивости содержатся в работах [16.14, 21.10]. В первой из них испытывалась защемленная по краям стальная оболочка с $R/h = 2540$. При $t = 300^\circ \text{C}$ ($k_t = 13,35$) оболочка потеряла устойчивость с образованием пояса мелких вмятин у диафрагмы. Во второй работе испытывалась стальная оболочка с $R/h = 1100$, опертая в середине на шпангоут. Потери устойчивости не наблюдалось при изменении температуры до 620°C ($k_t = 27,6$). После испытаний были зафиксированы остаточные деформации. Сопоставить эти результаты с расчетными трудно, так как из экспериментов недостаточно ясно, в какой мере удовлетворялись условия защемления и опирания. А эти условия, как ясно из изложенного, оказывают существенное влияние.

§ 5. Неравномерный нагрев по окружности

Используя результаты, полученные в § 1 гл. XV, исследуем устойчивость длинной неравномерно нагретой оболочки, температура которой постоянна по длине и толщине и изменяется в окружном направлении по закону

$$t = t^0 F(\varphi). \quad (5.1)$$

Здесь t^0 — амплитуда температуры, $F(\varphi)$ — четная функция, удовлетворяющая условиям Дирихле. Будем считать эту функцию достаточно плавной, чтобы исходное состояние длинной оболочки было близко к безмоментному. Температурные усилия в оболочке, определяются выражением

$$T_1^0 = -Eh\alpha_t t^0 [F(\varphi) - F_0 - F_1 \cos \varphi] = -Eh\alpha_t t^0 \sum_{p=2}^{\infty} F_p \cos p\varphi, \quad (5.2)$$

где

$$F_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(\varphi) d\varphi, \quad F_p = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\varphi) \cos p\varphi d\varphi. \quad (5.3)$$

В формулах (1.3) для этого случая следует положить

$$t_1 = Eh\alpha_t t^0, \quad f_1(\varphi) = F(\varphi) - F_0 - F_1 \cos \varphi = \sum_{p=2}^{\infty} F_p \cos p\varphi. \quad (5.4)$$

Из выражений (1.4) получим амплитудное значение критической температуры

$$t^0 = \tilde{k} t_b, \quad (5.5)$$

где

$$\tilde{k} = \tilde{\lambda}^{-1}, \quad t_b = \frac{h}{\alpha_t R \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (5.6)$$

Значение критического усилия определяется формулой

$$T_1^0 = -\tilde{k} T_b [F(\varphi) - F_0 - F_1 \cos \varphi] = -\tilde{k} T_b \sum_{p=2}^{\infty} F_p \cos p\varphi. \quad (5.7)$$

При некотором значении $\varphi = \varphi_0$ это усилие имеет максимум

$$T_{1\max}^0 = -\tilde{k} T_b [F(\varphi_0) - F_0 - F_1 \cos \varphi_0] = -\tilde{k} T_b \sum_{p=2}^{\infty} F_p \cos p\varphi_0. \quad (5.8)$$

Величина $\tilde{\lambda}$ находится из решения системы (3.18) гл. VI.

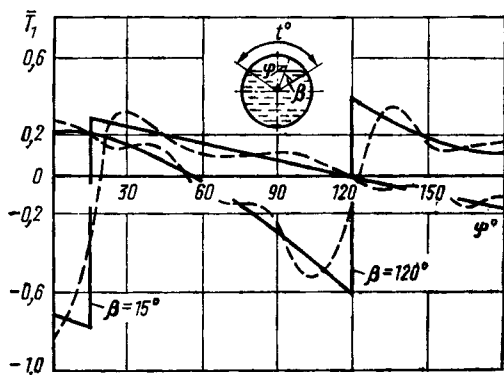


Рис. 21.7. Относительные температурные напряжения в оболочке, частично заполненной жидкостью.

В качестве примера исследуем устойчивость оболочки с температурой

$$t = t^0 \delta(\varphi), \quad (5.9)$$

где

$$\delta(\varphi) = 1 \text{ при } 0 \leq |\varphi| \leq \beta_-, \quad \delta(\varphi) = 0 \text{ при } \beta_+ \leq |\varphi| \leq \pi.$$

Этот случай температурного поля приблизительно соответствует температурному полю в частично заполненной жидкостью оболочке, помещенной в среду с температурой t^0 (рис. 21.7).

Согласно формулам (5.2), (5.3) получим

$$F_0 = \frac{\beta}{\pi}, \quad F_p = \frac{2}{\pi} \frac{\sin p\beta}{p},$$

$$T_1^0 = -Eh\alpha_i t^0 \pi^{-1} [\pi\delta(\varphi) - \beta - 2 \sin \beta \cos \varphi] =$$

$$= -Eh\alpha_i t^0 \sum_{p=2}^{\infty} F_p \cos p\varphi. \quad (5.10)$$

Изменение относительной величины продольного усилия $\bar{T}_1 = T_1^0 / Eh\alpha_i t^0$ в зависимости от φ и β показано на рис. 21.7. Для коэффициентов β_{nk} и критического усилия T_1^0 получим выражения

$$T_1^0 = -k_2 T_B [\pi\delta(\varphi) - \beta - 2 \sin \beta \cos \varphi] = -\tilde{k} T_B \sum_{p=2}^{\infty} F_p \cos p\varphi,$$

$$k_2 = \frac{\tilde{k}}{\pi}, \quad (5.11)$$

$$\beta_{0k} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin k\beta}{k} \delta_{k,p},$$

$$\beta_{nk} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(n+k)\beta}{n+k} \delta_{n+k,p} + \frac{\sin(n-k)\beta}{n-k} \delta_{|n-k|,p} \right]. \quad (5.12)$$

Наибольшее значение усилия T_1^0 принимает при $\varphi = \beta$:

$$T_{1\max}^0 = -k_2 T_B [\pi\delta(\varphi) - \beta - \sin 2\beta] = -\tilde{k} T_B \sum_{p=2}^{\infty} F_p \cos p\beta. \quad (5.13)$$

При этом положительным значениям t^0 (нагрев) соответствует $\delta(\varphi) = 1$, отрицательным (охлаждение) — $\delta(\varphi) = 0$.

На рис. 21.8 для $\beta = 15, 120^\circ$ построены кривые, качественно отражающие изменение прогибов. Эти кривые показывают, что выпучивание оболочки происходит в основном в сжатой зоне. Потеря устойчивости происходит с образованием большого количества коротких продольных волн, так что величина λ^2 является большим числом. При этом чем тоньше оболочка, тем больше значение параметра λ^2 . Для тонких оболочек можно построить приближенное решение, приняв $\lambda^2 \gg n^2$. В этом случае можно считать, что α_n не зависит от n , а, следовательно, критическая температура пропорциональна α_n . При этом, как было показано в § 1, гл. XV, амплитудная величина критического усилия равна величине критического усилия при однородном сжатии

$$T_{1\max}^0 = -T_B.$$

Для коэффициента $\tilde{k}$ из формулы (5.8) имеем выражение

$$\tilde{k} = [F(\varphi_0) - F_0 - F_1 \cos \varphi_0]^{-1}, \quad (5.14)$$

для рассмотренной в примере оболочки с жидкостью —

$$\tilde{k} = \pi k_2, \quad k_2 = [\pi \delta(\varphi) - \beta - \sin 2\beta]^{-1}. \quad (5.15)$$

На рис. 21.9 нанесены значения k_2 , подсчитанные по формуле (5.15). При этом положительные значения k_2 соответствуют нагреву оболочки, отрицательные — охлаждению. Уточнение результатов на ЭВМ методом итераций не привело к значительному изменению величин k_2 .

Таким образом, неравномерность распределения усилий в поперечном сечении рассмотренной оболочки с жидкостью мало влияет на критическое значение их амплитудной величины. Практически можно считать, что выпучивание оболочки происходит при достижении наибольшим сжимающим усилием величины критического усилия при однородном сжатии. Критическую температуру можно принимать пропорциональной h/R и определять по формулам (5.5), (5.15).

Полученные в этом параграфе формулы справедливы для длинных оболочек. Для коротких оболочек значения критических температур, определенных по этим формулам, вследствие влияния граничных условий будут занижены. Однако вывод о том, что потеря устойчивости происходит при равенстве амплитуды усилия критическому усилию при однородном сжатии, позволяет и в случае коротких оболочек определить критическую температуру по известной величине амплитуды усилия.

Отметим, что градиенты температуры по окружности более опасны, чем осесимметричные градиенты. Так, для рассмотренного в § 5 примера критическая температура при малых β полу-

чается равной 75° .

Изложенные результаты были получены В. В. Кабановым [14.2, 21.1, 21.2] и впоследствии подтверждены в работах [21.21, 21.24, 21.25].

В работе [21.24] содержатся также и результаты эксперимента с оболочками из нержавеющей ($E = 1,97 \cdot 10^6$ кг/см²,

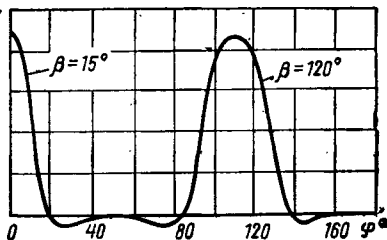


Рис. 21.8. Форма потери устойчивости оболочки, частично заполненной жидкостью.

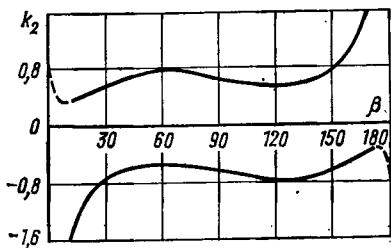


Рис. 21.9. Относительные критические температуры оболочки, частично заполненной жидкостью.

$\alpha_1 = 9,6 \cdot 10^{-6}$) и холоднокатаной ($E = 2,04 \cdot 10^6$ кг/см², $\alpha_1 = 6,5 \cdot 10^{-6} \div 8,4 \cdot 10^{-6}$) сталей. Оболочки имели размеры: $h = 0,394 \div 0,455$ мм, $R/h = 334 \div 291$, $L = 122$ см, $2R = 26,4$ см. Ширина полосы нагрева b изменялась от 1,27 см до 15,3 см. По краям оболочки заземлялась на цельнофрезерованных болванках. Нагрев производился кварцевыми лампами. Оболочки в большинстве случаев теряли устойчивость хлопком. Образовывались один — два пояса вмятин по длине, по окружности вмятины располагались в основном в сжатой зоне. Некоторые оболочки теряли устойчивость у опор в результате развития окружных деформаций. Эти деформации снижали осевые усилия, так что потеря устойчивости в данном случае происходила при более высоких температурах.

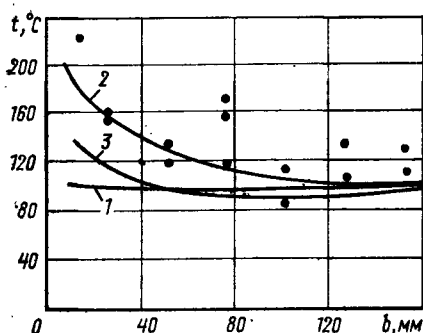


Рис. 21.10. Зависимость критических температур от ширины полосы нагрева оболочки, неравномерно нагретой по окружности.

Результаты эксперимента приведены на рис. 21.10. Кривая 1 соответствует теоретическому решению [21.24], кривая 2 — решению [21.21], 3 — также решению [21.21], но при этом параметры волнообразования в решении брались из эксперимента. При малой ширине полосы нагрева b экспериментальные точки лежат выше теоретических. С увеличением ширины полосы нагрева разница в теоретических и экспериментальных результатах уменьшается. В этом случае критическая температура близка к верхней классической. Конечно, из этого не следует, что и критические напряжения близки к верхним напряжениям сжатия. В эксперименте не производились измерения этих напряжений. Но, как уже отмечалось ранее, зависимость напряжений от температуры в исходном состоянии имеет нелинейный характер. Верхней критической температуре соответствуют напряжения, которые по величине ниже верхних критических напряжений сжатия.

В работе [21.25], где критические температуры составляли 0,68—0,89 от верхней классической температуры, отмечается, что влияние нелинейности деформирования в исходном состоянии не является столь большим и что критические температурные напряжения, вероятно, превосходят по величине критические напряжения от внешних нагрузок.

Подводя итог, следует отметить, что величины критических температур, полученные на основе линейной теории, во всех рас-

смотренных случаях неплохо подтверждаются экспериментами. Величины же критических напряжений, как и в случае внешних нагрузок, получаются меньше их верхних критических значений. Однако экспериментальные данные еще очень мало, а имеющиеся эксперименты проанализированы недостаточно четко, чтобы делать окончательные выводы.

§ 6. Равномерный нагрев, сжатие и боковое давление

В предыдущих параграфах было показано, что при осесимметричном поле температур критические температуры высоки, так что чисто температурная потеря устойчивости возможна только у очень тонких оболочек. Однако из этого не следует вывод о малом влиянии температуры вообще. Для практики более важно влияние температурных напряжений и деформаций на величину критических внешних нагрузок. В этом параграфе рассматривается влияние температуры на устойчивость оболочки, нагруженной боковым давлением и продольными усилиями.

Допустим, что оболочка, опертая по краям на жесткие диафрагмы, нагружена по краям продольными усилиями N и внутренним давлением P . Разность в температурах оболочки и диафрагм равна t . Будем рассматривать половину оболочки длиной l , поместив начало продольной координаты в середине оболочки (рис. 21.11). Прогибы оболочки в исходном состоянии определяются решением (1.4) гл. X, в котором

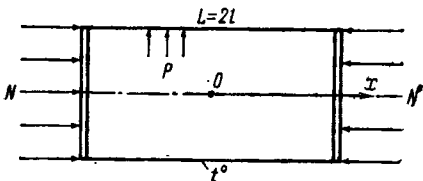


Рис. 21.11. Круговая цилиндрическая оболочка при внутреннем давлении, сжатии и нагреве.

$$w_b = -R \left(\alpha_t t + \frac{PR}{Eh} + \nu \frac{N}{Eh} \right). \quad (6.1)$$

Продольное и окружное усилия и изменение кривизны образующей определяются выражениями:

$$\begin{aligned} T_1^0 &= -N, \quad T_2^0 = PR - \frac{1}{2} T_b t_1 f_1 = PR - Eh k_2 w_b f, \\ w_{xx}^0 &= -k_2 t_1 f_2 = -2w_b \psi_1 \psi_2 k_2^2 \beta_1^2 \Psi_2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= A_3 \operatorname{ch} b_1 \eta \cos b_2 \eta + A_4 \operatorname{sh} b_1 \eta \sin b_2 \eta, \\ A_3 &= A_2 + \alpha_2 A_1, \quad A_4 = A_2 \alpha_2 - A_1, \quad \beta_1^2 = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{h}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} t_1 &= k_t = k_t^* + \nu N^* + P^*, \quad f_1 = -2f, \quad f_2 = -2\Psi_2 \alpha_4, \\ \alpha_4 &= \psi_1 \psi_2, \quad P^* = \frac{P^*}{2}, \quad k_t^* = \frac{t}{t_b}, \quad t_b = \frac{h}{\alpha_t R \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Расчеты показывают, что краевые эффекты в оболочке практически не перекрываются вплоть до $N^* = 0,9$. Поэтому при $N^* < 0,9$ можно использовать более простые выражения для функций f_1 и f_2 , считая оболочку полубесконечной и поместив начало координаты на диафрагме

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e^{-b_1\eta} (\cos b_2\eta + \alpha_3 \sin b_2\eta), \\ f_2 &= -2e^{-b_1\eta} \alpha_4 [(1 + \alpha_2 \alpha_3) \sin b_2\eta + (\alpha_2 - \alpha_3) \cos b_2\eta], \end{aligned} \quad (6.5)$$

где при защемлении $\alpha_3 = \alpha_1$, при свободном опирании оболочки на диафрагму — $\alpha_3 = \alpha_2$.

В нейтральном состоянии рассмотрим два варианта граничных условий: свободное опирание на диафрагму — случай СЗ, защемление на диафрагме — случай СЗ. В середине оболочки должны удовлетворяться условия симметрии (4.32) или условия косой симметрии (4.33) гл. VI.

Результаты расчетов по алгоритму, приведенному в гл. VI, показаны на рис. 21.12—21.16, при этом $\eta_m = 15$, $m = 220$. На рис. 21.12 показаны результаты для сжатия с нагревом [6.12]: 1 — свободно опертая оболочка; 2 — защемленная оболочка; 3 — оболочка, подкрепленная шпангоутами. Пунктир соответствует безмоментному исходному состоянию, штрихпунктиром даны значения k_i^* для случая $\nu = 0,3$. При $N^* = 0$ (температурная потеря устойчивости) результаты обсуждались в §§ 2, 3.

Рис. 21.12. Относительные критические усилия сжатия и температура оболочки с краевыми шпангоутами.

1, 2, 3. Эти результаты согласуются с результатами [6.24]. Параметр $\beta = 0,415$ во всех случаях. Характерной особенностью кривых взаимодействия рис. 21.12 является наличие угловых точек. Эти точки находятся на пересечении левой и правой ветвей кривых. Левая ветвь характеризует потерю устойчивости оболочки от окружающих температурных напряжений. Продольные сжимающие усилия в пределах этих ветвей увеличивают критическую температуру за счет дополнительного искривления образующих и снижения окружающих усилий. Форма потери

При $k_i^* = 0$ оболочка теряет устойчивость от продольного сжатия. В этом случае $N^* = 0,84; 0,91; 0,91$ соответственно для вариантов

устойчивости заземленной оболочки показана на рис. 21.14 внизу. По окружности образуется большое количество волн. Величины параметра β составляли $\beta = 3,6 \div 5,2$; $1,53 \div 1,6$; $1,15 \div 1$ соответственно для случаев 1, 2, 3.

Правая ветвь кривых отвечает потере устойчивости оболочки преимущественно от сжатия. Температурные напряжения в этом случае способствуют потере устойчивости. Значение параметра β для всех случаев граничных условий меняется мало ($\beta = 0,36 \div 0,415$). Обмен формами потери устойчивости происходит в угловых точках. Интересно отметить, что полученные кривые взаимодействия не соответствуют известной теореме Папковича о выпуклости области устойчивости, что является следствием нелинейности задачи (усилие N в решение входит нелинейно). На рис. 21.14 пунктиром показана кривая взаимодействия для случая 3, когда исходное состояние определялось по линейной теории краевого эффекта. Эта кривая выпукла.

На рис. 21.12 кружочками показаны экспериментальные данные [21.23], полученные при изгибе оболочки моментами и нагреве. Сопоставление с расчетом этих результатов носит относительный характер, так как в экспериментах при сжатии критические напряжения обычно меньше амплитуды критического напряжения при изгибе примерно на 30%.

На рис. 21.13, 21.14 показаны результаты расчетов при наличии внутреннего давления, а также для случаев охлаждения и сжатия, растяжения и нагрева [21.3]. Цифры 1, 2 на рис. 21.13 и 3 на рис. 21.14 в угловых клетках соответствуют опертой, заземленной оболочкам и оболочке со шпангоутами. В области отрицательных k_t (охлаждение) наблюдается еще более интенсивное снижение величины критического усилия сжатия, чем в случае нагрева.

Весьма интересным является и факт снижения критических температур при действии растягивающих усилий (положительные k_t , отрицательные N^*). Оба отмеченных эффекта обуславливаются влиянием искривлений образующих в исходном состоянии. Без учета этих искривлений картина получается качественно противоположной [20.4]. Внутреннее давление увеличивает как критическую температуру, так и критическое усилие сжатия, отчасти компенсируя таким образом вредное влияние температурных напряжений. Формы потери устойчивости по длине некоторых оболочек показаны на рис. 21.14 внизу. Первая цифра на рис. 21.14 означает величину N^* , вторая — β .

Сведения об эксперименте содержатся в работе [21.19], где была испытана оболочка из нержавеющей стали ($E = 1,9 \cdot 10^6$ кг/см²) с параметрами $R = 222$ см, $L = 61$ см, $h = 0,0221$ см. В середине оболочки снаружи имелся массивный алюминиевый шпангоут, через который для охлаждения

пропускался жидкий азот. Оболочка нагревалась до температуры $93,5^{\circ}\text{C}$, температура азота равнялась -160°C . Потом подавалось внутреннее давление $0,9 \text{ ат}$ и прикладывалось осевое сжатие. При величине осевых напряжений 810 кг/см^2 наблюдалась потеря устойчивости. Потеря устойчивости носила местный характер. Вблизи шпангоута образовалось два

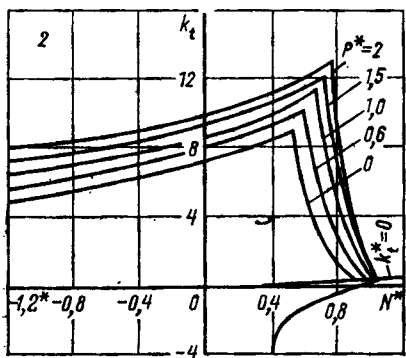
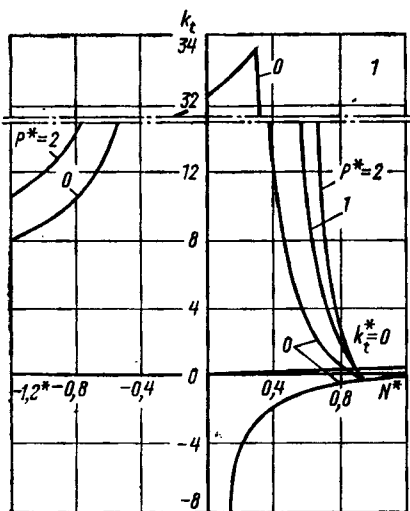


Рис. 21.13. Относительные критические продольное усилие и температура оболочки с краевыми шпангоутами.

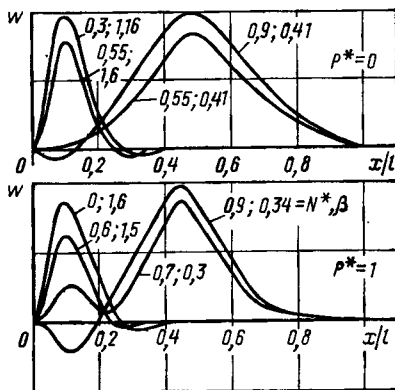
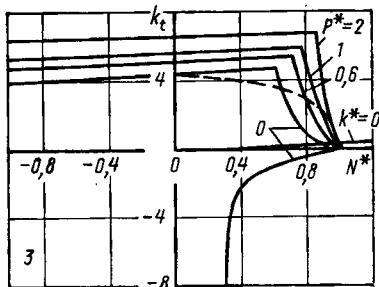


Рис. 21.14. Относительные критические продольное усилие и температура оболочки, подкрепленной шпангоутами, и формы потери устойчивости оболочек.

ряда вмятин. Первый, ближайший к шпангоуту ряд имел мелкие вмятины. Предполагается, что эти вмятины являются следствием действия температурных напряжений. Вмятины второго ряда имели ромбовидную форму, характерную для сжатия. Влияние нагрева на величину осевой силы было незначительным.

На рис. 21.15 показаны результаты расчетов [21.9] для заземленной (S4) по краям оболочки с $\eta_m = 30$ при сжатии, внешнем давлении и нагреве. В середине оболочки ставились условия косо́й симметрии (индекс k на левых ветвях кривых) и условия симметрии (остальные кривые), при этом

$$\begin{aligned} q^* &= \frac{q}{1,5q_B}, & q_B &= 0,856 \frac{E}{(1-\nu^2)^{3/4}} \frac{h}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}, \\ k_t &= k_t^* = \frac{t}{t_B}, & t_B &= \frac{h}{\alpha_t R \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Кривые взаимодействия, как и при сжатии с нагревом, имеют две ветви. Левая ветвь характеризует потерю устойчивости от

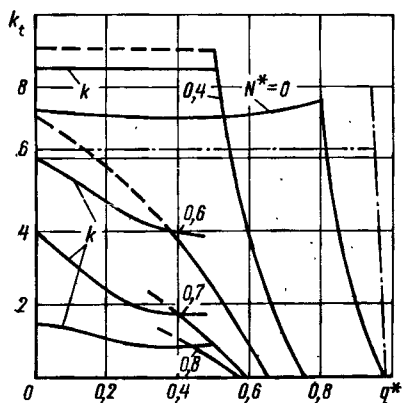


Рис. 21.15. Относительные критические температура, внешнее давление и усилие сжатия оболочки с краевыми шпангоутами.

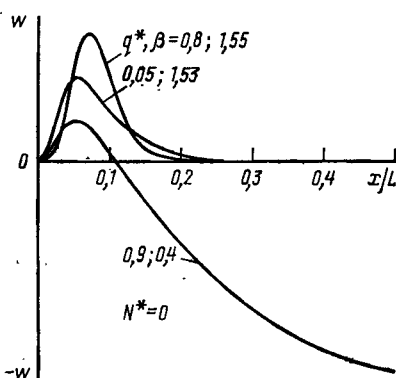


Рис. 21.16. Форма потери устойчивости нагретой оболочки при внешнем давлении.

температурных напряжений. Оболочка теряет устойчивость у заделки с образованием большого числа волн по окружности. Внешнее давление в пределах левой ветви незначительно влияет на устойчивость оболочки. Правая ветвь соответствует потере устойчивости от внешнего давления. Температурные усилия снижают, хотя и незначительно, величину критического давления. Оболочка теряет устойчивость по всей длине с образованием небольшого числа волн по окружности. Форма потери устойчивости показана на рис. 21.16. Незначительное взаимодействие температурной и внешней нагрузок объясняется различным характером форм выпучивания от температурных напряжений и от внешнего давления. Эти формы почти не перекрываются. Обмен

формами потери устойчивости происходит в угловых точках пересечения левой и правой ветвей. Штрих-пунктиром показана кривая, полученная без учета искривлений образующих и при $N^* = 0$.

§ 7. Неравномерный по длине нагрев и сжатие

Рассмотрим оболочку с температурой, распределенной по (4.1), при наличии усилий сжатия N . В этом случае в исходном состоянии

$$\begin{aligned} w^0 = & -\frac{h}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left\{ \nu N^* + k_t^* \left[1 + \left(1 - \frac{4\nu^4}{\gamma^2} e^{-\frac{k|\eta|}{\gamma}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} e^{-b_1|\eta|} (\cos b_2\eta + \alpha_2^* \sin b_2|\eta|) \right] \right\}, \\ T_2^0 = & -\frac{1}{2} k_t^* T_b f_1, \quad w_{xx}^0 = -k_2 t_1 f_2, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = & \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left[e^{-b_1|\eta|} (\cos b_2\eta + \alpha_2^* \sin b_2|\eta|) - e^{-\frac{k|\eta|}{\gamma}} \right] \text{sign } \eta, \\ f_2 = & -\psi_1\psi_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left\{ e^{-b_1|\eta|} [(1 + \alpha_2\alpha_2^*) \sin b_2|\eta| - \gamma_3 \cos b_2\eta] + \right. \\ & \left. + \gamma_3 e^{-\frac{k|\eta|}{\gamma}} \right\} \text{sign } \eta. \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\gamma_1 = 1 + 4N^*\gamma^2, \quad \gamma_2 = \gamma_1 + 4\gamma^4, \quad \alpha_2^* = \alpha_2 + \gamma_3, \quad \gamma_3 = \frac{2\gamma^2}{\gamma_1\psi_1\psi_2}.$$

Графики функций f_1 (сплошные линии), f_2/α_5 — (пунктир) для некоторых значений N^* при $\gamma = 0$ показаны на рис. 21.17 ($\alpha_5 = \psi_1\psi_2(1 + \alpha_2^2)$).

Результаты расчета [21.9] показаны на рис. 21.18 для оболочки с $\eta_m = 10$, $m = 800$. В области больших N^* наблюдается крутое падение кривой. Незначительное изменение температуры приводит к существенному снижению критического усилия сжатия. Это объясняется наличием осесимметричного начального прогиба внутрь оболочки и нелинейностью задачи по продольному усилию. Без учета этих эффектов влияние температуры проявляется слабее [21.5]. Зависимость критического усилия от параметра γ показана на рис. 21.19.

Эксперимент содержится в работе [21.13]. При $k_t^* = 3,6$ отношение критических экспериментальных значений усилий сжатия нагретых и ненагретых оболочек составляло 0,84—0,89. Снижение критического усилия за счет влияния температуры намного меньше расчетного. По-видимому, это следует объяснить невозможностью создать теоретический скачок температуры и влиянием начальных неправильностей. Потеря устойчивости у всех испытанных оболочек происходила в зоне перепада температур.

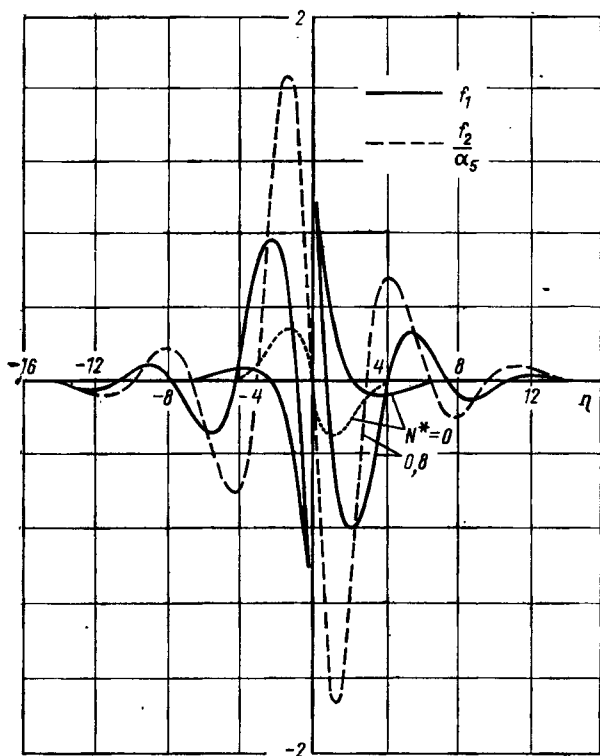


Рис. 21.17. Характер неоднородности окружающих температурных усилий и изменения кривизны образующей оболочки при неравномерном по длине нагреву и сжатию.

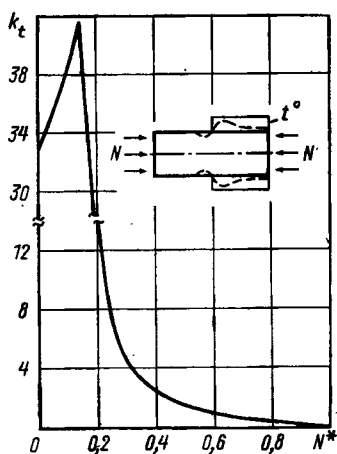


Рис. 21.18. Относительная критическая температура и усилие сжатия оболочки при неравномерном по длине нагреву.

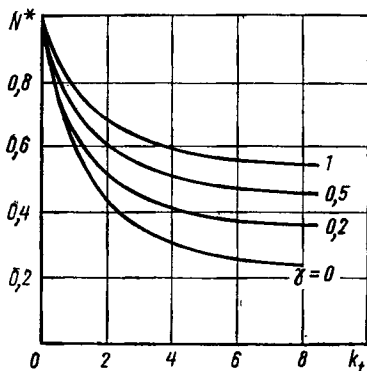


Рис. 21.19. Относительные критические температуры оболочки при плавном изменении температуры по длине.

НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Глава XXII

ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Оболочки вращения находят разнообразное применение в технике: носовые части самолетов и ракет, различного рода обтекала, днища гермокабин и резервуаров, различного рода аппараты для подводного плавания и т. д. По сравнению с круговой цилиндрической оболочкой оболочки вращения гораздо менее исследованы.

§ 1. Основные уравнения

Рассмотрим оболочку (рис. 22.1), срединная поверхность которой получена вращением некоторой кривой ab вокруг оси Oz . Кривую ab обычно называют меридианом. Примем за криволинейные координаты длину дуги меридиана s и угол φ , определяющий положение меридиана.

Пусть R_1 — радиус кривизны меридиана, R_2 — длина нормали к срединной поверхности от оси оболочки до срединной поверхности. Радиусы R_1, R_2 являются главными радиусами кривизны поверхности вращения, главные кривизны соответственно $k_1 = R_1^{-1}, k_2 = R_2^{-1}$. Для элементов дуг меридиана и параллели имеем

$$ds_1 = ds = R_1 d\theta, \quad ds_2 = r d\varphi, \quad (1.1)$$

следовательно, параметры Ляме равны

$$A = 1, \quad B = r. \quad (1.2)$$

Очевидно, что $r = R_2 \sin \theta$. При этом $dr = ds \cos \theta, dz = ds \sin \theta$. Используя (1.2) и общие уравнения ч. I, можно получить уравнения для оболочек вращения.

Исходное осесимметричное состояние. Будем считать, что исходное состояние можно разделить на безмоментное и состояние типа краевого эффекта. Усилия безмоментного состояния на-

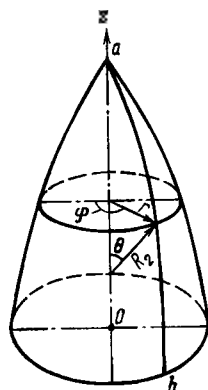


Рис. 22.1. Геометрия оболочки вращения.

ходятся из уравнений (1.6) гл. III

$$\begin{aligned}(BT_1^0)_s - B_s T_2^0 + B q_1 &= 0, & (BS^0)_s + B_s S^0 + B q_2 &= 0, \\ k_1 T_1^0 + k_2 T_2^0 + q &= 0.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Исключая из первого уравнения усилие T_2^0 , перепишем уравнения (1.3) в виде

$$\begin{aligned}(T_1^0 B \sin \theta)_s + B(q_1 \sin \theta + q \cos \theta) &= 0, \\ (B^2 S^0)_s + B^2 q_2 &= 0,\end{aligned}\quad (1.4)$$

откуда находим

$$\begin{aligned}T_1^0 &= -\frac{1}{B \sin \theta} \int (q_1 \sin \theta + q \cos \theta) ds + C_1, \\ S^0 &= -\frac{1}{B^2} \int B^2 q_2 ds + C_2, \\ T_2^0 &= -R_2(q + k_1 T_1^0).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из граничных условий. Если, например, оболочка вращения ограничена параллелями, то

$$C_1 = T_1^K, \quad C_2 = S^K, \quad (1.6)$$

где T_1^K, S^K — контурные мембранные усилия.

Прогибы в зоне краевого эффекта находятся из решения уравнения нелинейного краевого эффекта (6.5) гл. III. При выводе этого уравнения принимались допущения о локальном характере деформирования оболочки. В зоне деформирования оболочка считалась пологой с постоянными геометрическими характеристиками.

Для исследования устойчивости равновесия исходного состояния можно использовать уравнения, полученные в гл. IV. Наиболее простой вариант этих уравнений, соответствующий локальной потере устойчивости, имеет вид (2.26) гл. IV. От уравнений круговой цилиндрической оболочки они отличаются добавочными слагаемыми, содержащими кривизну k_1 . Решения задач локальной устойчивости оболочек вращения принципиально не отличаются от решений подобных задач для круговой цилиндрической оболочки, поскольку в зоне потери устойчивости кривизны считаются постоянными. Такой упрощенный подход к исследованию устойчивости оболочек вращения возможен во многих практически важных случаях, поскольку исходное напряженное состояние оболочек вращения из-за переменности кривизны, как правило, неоднородное даже при однородных нагрузках. Эта неоднородность и приводит к локализации формы потери устойчивости.

§ 2. Внешнее давление

Рассмотрим жестко защемленную оболочку вращения, нагруженную внешним давлением. Усилия безмоментного состояния определяется выражениями:

$$T_1^0 = -\frac{qR_2}{2}, \quad T_2^0 = -\frac{qR_2}{2}(2-r), \quad r = \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.1)$$

Усилия с учетом краевого эффекта в окрестности защемления

$$T_2^0 = -\frac{Eh^2\sigma}{R_2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[2-r - (2-\nu-r)e^{-\beta x_1} (\cos \gamma x_1 + \frac{\beta}{\gamma} \sin \gamma x_1) \right],$$

$$T_1^0 = -\frac{2Eh^2\sigma}{R_2\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad \sigma = \frac{qR_2^2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2Eh^2}, \quad (2.2)$$

$$w_{ss}^0 = \frac{2\sigma}{R_2}(2-\nu-r)e^{-\beta x_1} \left(\cos \gamma x_1 - \frac{\beta}{\gamma} \sin \gamma x_1 \right),$$

$$x_1 = \frac{s\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{R_2h}}, \quad \beta^2 = \frac{1-\sigma}{2}, \quad \gamma^2 = \frac{1+\sigma}{2}.$$

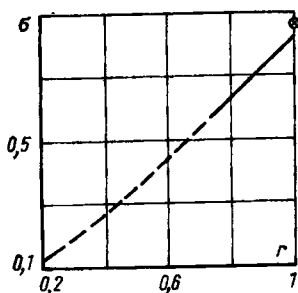


Рис. 22.2. Относительная величина критического внешнего давления оболочки вращения.

Результаты исследования локальной потери устойчивости, полученные Э. И. Григолюком и Ю. В. Липовцевым [22.2] методом конечных разностей, показаны на рис. 22.2. Точкой показаны результаты Хуана [24.10] для сферы ($r=1$). Некоторое завышение ($\sigma=0,864$ вместо $0,805$) критического давления объясняется неточностью определения усилий T_2^0 в исходном состоянии. Пунктиром показаны (предположительно) значения σ для оболочек, имеющих $r < 0,75$. В этом случае потеря устойчивости не носит локальный характер, волнообразование распространяется на всю поверхность оболочки, и решение с затухающими функциями (2.2) дает погрешность.

§ 3. Растягивающие усилия

Рассмотрим усеченную оболочку вращения (рис. 22.3), имеющую главные радиусы кривизны

$$R_1 = R_0(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{-3/2}, \quad R_2 = R_0(1 + \gamma \sin^2 \theta)^{1/2}. \quad (3.1)$$

Параметр R_0 равен радиусам кривизны при $\theta = 0$. Значение $\gamma = 0$ соответствует сфере, $\gamma = -1$ — параболоиду, $\gamma > -1$ — эллипсоиду, $\gamma < -1$ — гиперboloиду. Оболочка на краях имеет жесткие шпангоуты, к которым приложены растягивающие усилия. Величина погонного усилия на краю $\theta = \pi/2$ равна N . Усилия безмоментного состояния в оболочке определяются выражениями:

$$T_1^0 = \frac{NR_*}{R_2 \sin^2 \theta}, \quad T_2^0 = -\frac{R_2}{R_1} T_1^0, \quad (3.2)$$

где R_* — значение R_2 при $\theta = \pi/2$. Прогибы и моментная часть

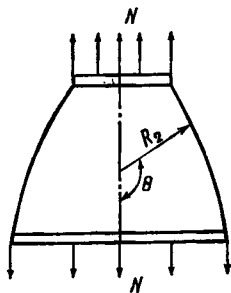


Рис. 22.3. Усеченная оболочка вращения.

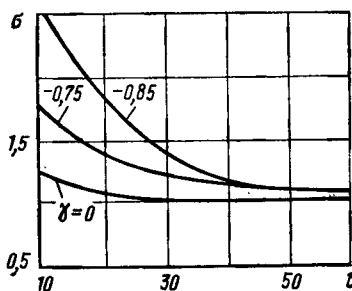


Рис. 22.4. Относительная величина критического внешнего давления оболочек вращения.

усилий находятся из решения уравнения нелинейного краевого эффекта.

Окружные усилия оказываются сжимающими. Следовательно, оболочка может потерять устойчивость. Впервые, по-видимому, на это обратил внимание Яо [22.10] (1963), который исследовал задачу устойчивости усеченной полусферы. В этом решении было показано, что оболочка теряет устойчивость, как цилиндрическая оболочка при внешнем давлении, с образованием одной полуволны по меридиану и многих волн по окружности. При этом моментность исходного состояния не оказывала значительного влияния.

На рис. 22.4 и в табл. 22.1 приведены полученные Э. И. Григолюком и Ю. В. Липовцевым методом конечных разностей [22.2] значения σ . При этом

$$\sigma = \frac{NR_* \sqrt{3(1-\nu^2)}}{Eh^2}, \quad l = \frac{l_s \sqrt{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{R_* h}}, \quad (3.3)$$

l_s — длина меридиана.

В работе Яо имеется результат эксперимента, в котором испытана оболочка с $R/h = 757$. Получено $N/Eh = 4,72 \cdot 10^{-4}$.

ТАБЛИЦА 22.1

l	γ						
	-0,9	-0,88	-0,85	-0,75	-0,5	0	0,5
20	2,41	2,08	1,78	1,36	1,12	1,02	1,01
30	1,70	1,54	1,38	1,16	1,04	1,01	1
40	1,45	1,33	1,23	1,09	1,02	1	1
50	1,30	1,23	1,17	1,06	1,01	1	1
60	1,23	1,16	1,11	1,03	1	1	1

Согласно приведенному здесь решению $N/Eh = 5,8 \cdot 10^{-4}$. Расчетное критическое усилие превышает экспериментальное на 19%.

§ 4. Эллиптические оболочки

Рассмотрим оболочку, полученную вращением эллипса с полуосями a , b вокруг оси, содержащей полуось b (рис. 22.5).

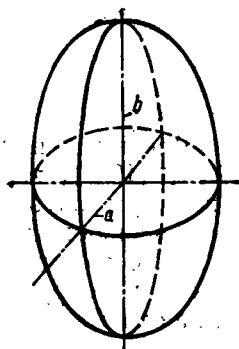


Рис. 22.5. Эллиптическая оболочка.

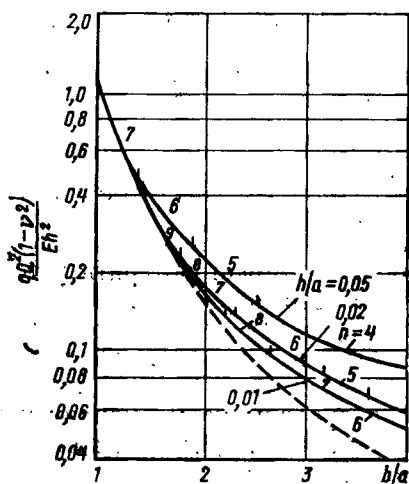


Рис. 22.6. Значения относительного критического давления эллиптической оболочки.

Оболочка находится под действием внешнего давления q . Усилия безмоментного состояния определяются выражениями

$$T_1^0 = -\frac{qa}{2} \left(2 - \frac{a^2}{b^2} \right), \quad T_2^0 = -\frac{qa}{2}. \quad (4.1)$$

Впервые, по-видимому, эту задачу решал Х. М. Муштари [2.7], получивший приближенные формулы для внешнего критического давления

$$\begin{aligned} q_a &= \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h^2}{2b^2 - a^2}, & a < b, \\ q_a &= \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h^2 b^2}{a^4}, & a > b, \end{aligned} \quad (4.2)$$

и для внутреннего критического давления

$$q_a = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h^2}{a^2 - 2b^2}, \quad a > b. \quad (4.3)$$

Эта же задача позже рассматривалась в работе [22.9]. Решение задачи было получено в тригонометрических рядах методом Релея — Рунта и исследовано численно. Исходное состояние оболочки считалось безмоментным. Результаты расчетов представлены на рис. 22.6 сплошными линиями. Пунктир нанесен по формуле (4.2). В работе [22.9] имеются результаты испытаний оболочек из эпоксидной резины. Экспериментальные значения критического давления для тонких оболочек составляют 85—91 % от расчетных значений.

Г л а в а XXIII

КРУГОВАЯ КОНИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

Круговая коническая оболочка, как и цилиндрическая оболочка, находит широкое применение в конструкциях самолетов, ракет, двигателей и т. д. Однако проблема ее устойчивости, в сравнении с цилиндрической оболочкой, разработана в значительно меньшей мере, что отчасти объясняется более сложной структурой уравнений.

§ 1. Уравнения

Все уравнения конической оболочки (рис. 23.1) могут быть получены из общих уравнений, приведенных в первой части книги, если в них подставить коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны

$$\begin{aligned} A &= 1, & B &= r = s \sin \gamma, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= 1/R_2, & R_2 &= s \operatorname{tg} \gamma, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где 2γ — угол конусности оболочки, s — расстояние по мери-

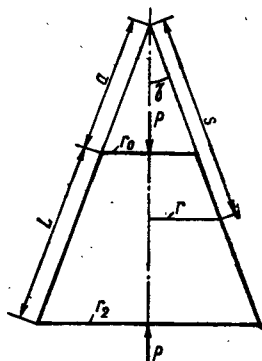


Рис. 23.1. Продольное сечение конической оболочки.

диану от вершины конуса. В качестве гауссовых координат здесь приняты s и φ , которым в уравнениях соответствуют α , β .

Выпишем, например, основные уравнения технической теории оболочек (гл. III):

кинематические соотношения

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_s + \frac{1}{2} \omega_s^2, \quad e_{22} = \frac{1}{s} \left(v_\psi + u - \omega \operatorname{ctg} \gamma + \frac{\omega_\psi^2}{2s} \right), \\ e_{12} &= v_s - \frac{v}{s} + \frac{1}{s} u_\psi + \frac{1}{s} \omega_s \omega_\psi, \quad \chi_1 = \omega_{ss}, \\ \chi_2 &= \frac{1}{s} \omega_s + \frac{1}{s^2} \omega_{\psi\psi}, \quad \tau = \left(\frac{1}{s} \omega_\psi \right)_s, \quad \psi = \varphi \sin \gamma; \end{aligned} \quad (1.2)$$

нелинейные уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F - Eh (\omega_{s\psi} - \omega_{ss} \omega_{\psi\psi} - 2s^{-1} \omega_\psi \omega_{s\psi} + s^{-2} \omega_\psi^2 - \\ - s \omega_s \omega_{ss} - s \operatorname{ctg} \gamma \omega_{ss}) s^{-2} = 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - s^{-1} [\operatorname{ctg} \gamma F_{ss} + (F_s + s^{-1} F_{\psi\psi}) \omega_{ss} + \\ + (\omega_s + s^{-1} \omega_{\psi\psi}) F_{ss}] + 2(s^{-1} F_\psi)_s (s^{-1} \omega_\psi)_s - q = 0; \end{aligned} \quad (1.3)$$

здесь F — функция усилий, при этом

$$\begin{aligned} T_1 &= s^{-1} (F_s + s^{-1} F_{\psi\psi}), \quad T_2 = F_{ss}, \\ S &= - (s^{-1} F_\psi)_s, \quad \nabla^2 = ()_{ss} + s^{-1} ()_s + s^{-2} ()_{\psi\psi}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

уравнения устойчивости

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 w - s^{-1} \operatorname{ctg} \gamma F_{ss} - T_1^0 \omega_{ss} - T_2^0 s^{-1} (\omega_s + s^{-1} \omega_{\psi\psi}) - \\ - 2S^0 (s^{-1} \omega_\psi)_s - \omega_{ss}^0 (F_s + s^{-1} F_{\psi\psi}) s^{-1} - \\ - s^{-1} (\omega_s^0 + s^{-1} \omega_{\psi\psi}^0) F_{ss} + \\ + 2(s^{-1} \omega_\psi^0)_s (s^{-1} F_\psi)_s = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F - Eh [2s^{-1} \psi_s \omega_{s\psi}^0 - s^{-1} (\omega_{ss} \omega_{\psi\psi}^0 + \omega_{\psi\psi} \omega_{ss}^0) - \\ - 2s^{-2} (\omega_\psi \omega_{s\psi}^0 + \omega_{s\psi} \omega_\psi^0) + 2s^{-3} \omega_\psi \omega_\psi^0 - \omega_s \omega_{ss}^0 - \\ - \omega_s^0 \omega_{ss} - \operatorname{ctg} \gamma \omega_{ss}] s^{-1} = 0. \end{aligned}$$

При осесимметричном нагружении оболочки уравнения (1.5) упрощаются:

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 w - s^{-1} [\operatorname{ctg} \gamma F_{ss} + T_2^0 (\omega_s + s^{-1} \omega_{\psi\psi}) + \\ + \omega_{ss}^0 (F_s + s^{-1} F_{\psi\psi}) + \omega_s^0 F_{ss}] - T_1^0 \omega_{ss} = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F + Ehs^{-1} [\omega_{ss}^0 (s^{-1} \omega_{\psi\psi} + \omega_s) + \omega_{ss} (\omega_s^0 + \operatorname{ctg} \gamma)] = 0.$$

Исходное напряженно-деформированное состояние конической оболочки, как и в случае цилиндрической оболочки, можно в ряде случаев разделить на безмоментное состояние и состояние типа краевого эффекта. При этом состояние типа краевого эффекта можно определять из уравнения нелинейного краевого эффекта цилиндрической оболочки, используя в нем местный радиус кривизны конической оболочки.

§ 2. Осевое сжатие

Рассмотрим свободно опертую круговую коническую оболочку, нагруженную осевыми сжимающими силами P (рис. 23.1). Исследуем сначала осесимметричную форму потери устойчивости. Считая, что при потере устойчивости образуется большое число волн, опустим в уравнениях (1.6) низшие производные и будем считать $\dot{s}$ постоянной в пределах полуволны. Уравнения (1.6) при этом имеют вид

$$\begin{aligned} D w_{ssss} + N w_{ss} - s^{-1} \operatorname{ctg} \gamma F_{ss} &= 0, \\ F_{ssss} + E h s^{-1} \operatorname{ctg} \gamma w_{ss} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $N = -T_1^0 = P/(\pi s \sin 2\gamma)$ — сжимающее погонное усилие. Исключая F , приходим к одному уравнению для оболочки длиной в одну полуволну (в пределах полуволны считаем $N = \text{const}$):

$$D w_{ssss} + N w_{ss} + E h s^{-2} \operatorname{ctg}^2 \gamma w = 0. \quad (2.2)$$

Принимая

$$w = C \sin \lambda s, \quad (2.3)$$

получаем из (2.2)

$$D \lambda^4 - N \lambda^2 + s^{-2} \operatorname{ctg}^2 \gamma E h = 0, \quad (2.4)$$

откуда

$$N = D \lambda^2 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma}{s^2 \lambda^2} E h. \quad (2.5)$$

Из условия минимума $\partial N / \partial \lambda^2 = 0$ находим

$$\lambda^2 = \left(\frac{E h}{D} \right)^{1/2} \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{s}, \quad (2.6)$$

при этом

$$N = 2 D \lambda^2 = \frac{E h^2}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} \frac{1}{s \operatorname{tg} \gamma}. \quad (2.7)$$

Меньшее усилие соответствует наибольшему значению s , следовательно, s здесь следует положить равным координате большего основания конуса l_1 . Таким образом, потеря устойчивости происходит у большего основания, и величина критического

погонного усилия сжатия у этого основания равна

$$N = \frac{Eh^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{l_1 \operatorname{tg} \gamma} = \frac{Eh^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2) R_{2k}} = \frac{Eh^2 \cos \gamma}{\sqrt{3}(1-\nu^2) r_2}. \quad (2.8)$$

Величина $R_{2k} = l_1 \operatorname{tg} \gamma$ — радиус кривизны конуса у большего основания, r_2 — радиус окружности основания. Формула (2.8) аналогична формуле Лоренца — Тимошенко для круговой цилиндрической оболочки.

Она была получена И. Я. Штаерманом [23.6]. Для критической силы P из (2.8) имеем выражение ($P = 2\pi r_2 N \cos \gamma$, $r_2 = l_1 \sin \gamma$)

$$P = \frac{2\pi Eh^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \cos^2 \gamma. \quad (2.9)$$

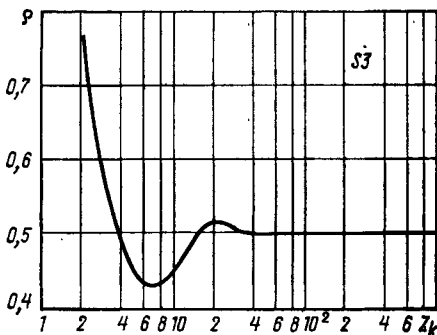


Рис. 23.2. Относительная величина критического усилия сжатия конической оболочки.

Более детальное исследование задачи содержится в работе [23.8], в которой решались уравнения в смещениях. Смещения задавались рядами, уравнение устойчивости решалось методом Бубнова. В результате задача сводилась к вычислению собственных чисел системы линейных алгебраических уравнений. Вычисления на ЭВМ производились с проверкой сходимости решения при увеличении порядка определителей. Наибольший порядок определителей равнялся 31. Погрешность вычислений при этом не превосходила 1%. В табл. 23.1 показаны значения отношения $\rho = N/N_v$, где N_v берется согласно (2.8), для четырех вариантов граничных условий S1—S4 для оболочки с $r_0/h = 100$, $\nu = 0,3$.

ТАБЛИЦА 3.1

γ^0	$L/r_0=0,3$			$L/r_0=0,5$			$L/r_0=2$	
	S1, S3	S2	S4	S1, S3	S	S4	S1, S3	S2
0,5	0,4992	0,5104	1,005 (7)	0,5131	0,5190	1,002 (8)	0,5	0,507
1	0,4991	0,5106	1,005 (7)	0,5131	0,5191	1,002 (8)	0,5	0,507
2	0,4999	0,5112	1,005 (7)	0,5134	0,5193	1,002 (8)	0,5	0,501
5	0,5021	0,5133	1,006 (7)	0,5139	0,5196	1,002 (8)	0,500	0,507
10	0,5073	0,5184	1,007 (7)	0,5147	0,5203	1,002 (8)	0,5006	0,507
30	0,5567	0,5696	1,017 (5)	0,5139	0,5203	1 001 (7)	0,5007	0,5098
60	0,8701	0,8924	1,144 (0)	0,4496	0,4657	1,044 (7)	0,5004	0,5181
80	2,383	2,447	2,477 (0)	0,5407	0,5984	1,015 (3)	0,501	0,5415

В скобках указано число волн по окружности. Для вариантов граничных условий $S2$ число волн равно двум.

В случае $S1$, $S3$ значение $\rho \approx 0,5$ соответствует осесимметричной форме потери устойчивости. При $n > 2$ значение $\rho \approx 1$. При переходе к цилиндрической оболочке значение ρ примерно от 0,5 скачком увеличивается до 1. На рис. 23.2 показана зависимость ρ от параметра $Z_k = (1 - \nu^2)^{1/2} (L/R_0 h)$, где $R_0 = (r_0 + r_2)/2 \cos \gamma$ — среднее значение радиусов. На рис. 23.3 показана

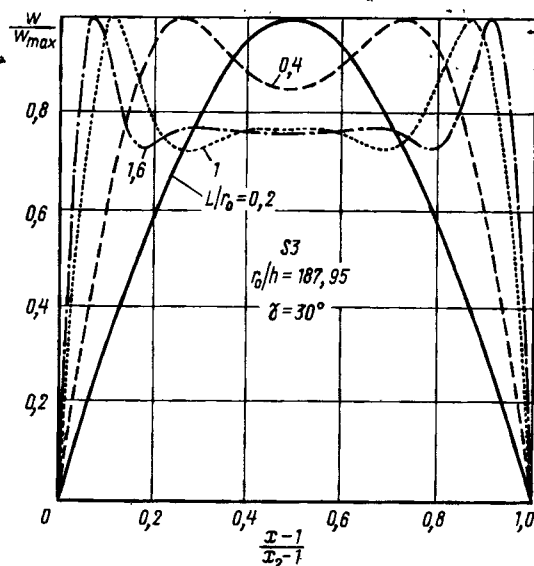


Рис. 23.3. Формы потери устойчивости конической оболочки при сжатии.

форма потери устойчивости. Таким образом, классическое значение $\rho = 1$ достигается только в случае $S4$. При других граничных условиях оно может быть реализовано только у очень коротких оболочек, которые теряют устойчивость как пластины. Снижение критического усилия в два раза по сравнению с классическим в случае $S3$ объясняется появлением осесимметричного изгиба на краях оболочки при перемещении ее в осевом направлении. Получается такая же картина, как при сжатии консервативным усилием цилиндрической оболочки со свободными краями, когда значение ρ тоже равно 0,5. Этим же можно объяснить и скачкообразное изменение ρ от 0,5 до 1 при предельном переходе к цилиндрической оболочке: эффект свободного края проявляется даже при очень малых углах конусности γ . У свободно опертой цилиндрической оболочки этого эффекта

нет. Практического значения отмеченный эффект, по-видимому, не имеет, поскольку осесимметричная форма потери устойчиво-

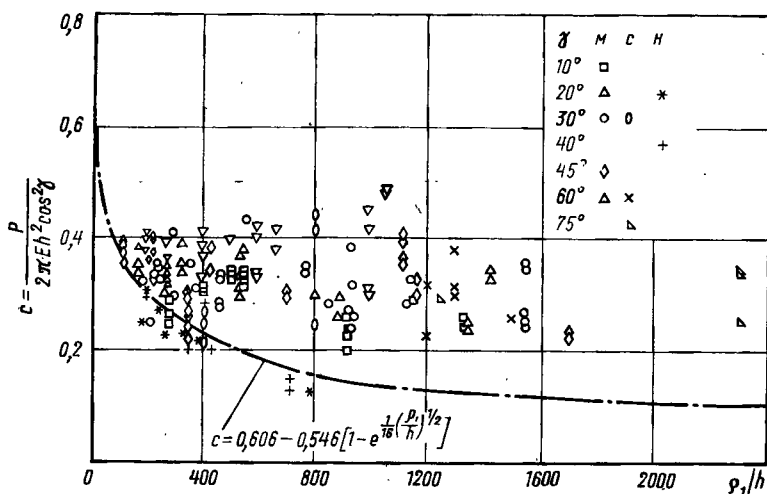


Рис 23.4. Экспериментальные значения относительного критического усилия сжатия конической оболочки.

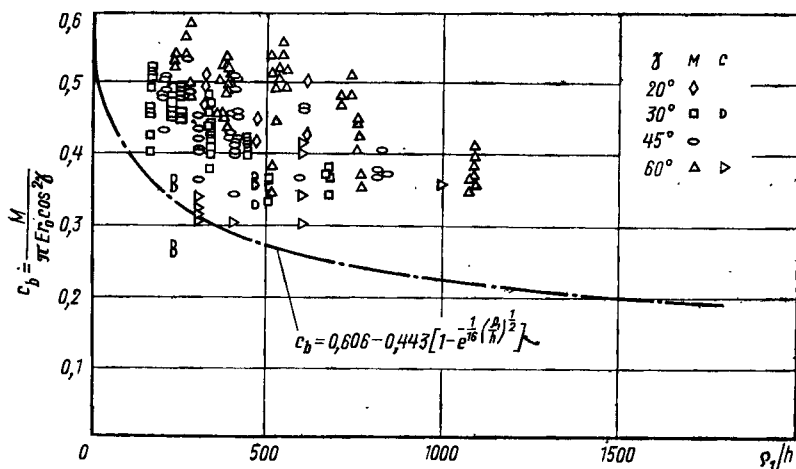


Рис. 23.5. Экспериментальные значения критической относительной величины изгибающего момента конической оболочки.

сти, которой и соответствуют большие осевые смещения, обычно не реализуется по многим причинам, в частности, по несоответствию граничных условий. Если, например, на одном из краев

изменить условие $S3$ на $S4$, то получается снова $\rho = 1$. Так что предпочтительнее ориентироваться на $\rho = 1$, скорректировав это значение учетом моментности исходного состояния и начальных неправильностей. Очевидно, влияние моментности исходного состояния будет примерно таким же, как и в случае цилиндрической оболочки, так как краевой эффект проявляется в узком погранслое, в котором коническая оболочка может быть заменена цилиндрической.

На рис. 23.4 приведены результаты экспериментов по данным обзора Сейда [23.14]. По оси абсцисс отложено отношение меньшего радиуса кривизны $\rho_1 = r_0/\cos \gamma$ к толщине оболочки. Расхождение с расчетом немного меньше, чем у цилиндрических оболочек. Для оценки устойчивости оболочек можно использовать эмпирические кривые, полученные для цилиндрических оболочек, вводя в них вместо радиуса цилиндра радиус ρ_1 .

Такое же положение имеет место и в случае изгиба оболочки моментами. Данные экспериментов [23.14] для этого случая показаны на рис. 23.5 (на рис. 23.4 и 23.5 с — стальные, м — майларовые, н — никелиевые оболочки).

§ 3. Внешнее давление

Рассмотрим коническую оболочку, нагруженную внешним поперечным давлением q . Исходное состояние оболочки считаем безмоментным. Усилия этого состояния:

$$T_1^0 = -\frac{qR_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{s^2}\right), \quad T_2^0 = -qR_2. \quad (3.1)$$

Уравнения устойчивости (1.6) в этом случае могут быть решены, например, методом Бубнова или методом конечных разностей. В работе Сейда [23.14] показано, что критическое давление свободно опертой оболочки можно представить в виде простой приближенной формулы

$$k_q = \frac{q}{q_b} = f(r_k), \quad r_k = 1 - \frac{r_0}{r_2}. \quad (3.2)$$

Здесь

$$q_b = \frac{0,92E}{\frac{L}{R_c} \left(\frac{R_c}{h}\right)^{5/2}}, \quad R_c = \frac{r_0 + r_2}{2 \cos \gamma} \quad (3.3)$$

— верхнее критическое давление эквивалентной цилиндрической оболочки, имеющей такую же длину образующей, как и конус, и радиус, равный среднему радиусу кривизны конуса R_c . Функция $f(r_k)$, характеризующая влияние конусности, показана на рис. 23.6. Пунктир проведен согласно зависимости

$$f = 1 + 0,6r_k^3. \quad (3.4)$$

Для других вариантов граничных условий задача исследовалась Барухом, Харари, Зингером [23.7] и В. П. Мальцевым [23.3]. В работе [23.7] рассмотрены четыре варианта граничных условий $S1 - S4$. Решение задачи строилось в рядах. Результаты вычислений для оболочки, имеющей $r_0/h = 100$, $\nu = 0,3$,

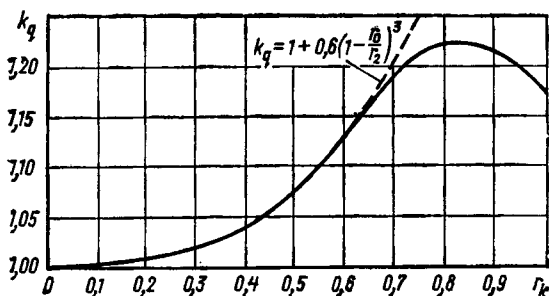


Рис. 23.6. Относительное внешнее критическое давление конической оболочки.

приведены в табл. 23.2, где q_i — критическое давление для вариантов граничных условий S_i , в скобках указано число волн по окружности. Как и в случае цилиндрических оболочек, ограничение смещений вдоль образующих приводит к повышению устойчивости оболочек. Это повышение для длинных и тонких оболочек составляет примерно 45%. Ослабление ограничений смещений по окружности незначительно уменьшает критическое давление.

ТАБЛИЦА 23.2

γ°	$L/r_0 = 1$				$L/r_0 = 10$			
	$(q_0/E) 10^6$	q_1/q_0	q_2/q_0	q_4/q_0	$(q_0/E) 10^6$	q_1/q_0	q_2/q_0	q_4/q_0
0	9,84 (8)	0,96 (8)	1,17 (8)	1,24 (9)	0,968 (3)	0,99 (3)	1,47 (3)	1,49 (3)
10	8,57 (9)	0,95 (8)	1,14 (9)	1,24 (10)	0,418 (4)	0,99 (4)	1,41 (6)	1,42 (6)
30	5,84 (9)	0,94 (9)	1,09 (9)	1,21 (10)	0,139 (9)	0,99 (9)	1,34 (11)	1,37 (11)
50	3,28 (9)	0,92 (9)	1,02 (9)	1,16 (10)	0,054 (11)	0,95 (11)	1,26 (13)	1,33 (14)
70	1,20 (8)	0,88 (7)	0,94 (7)	1,10 (8)	0,016 (11)	0,93 (10)	1,115 (12)	1,27 (13)
85	1,71 (5)	0,84 (3)	0,85 (3)	1,02 (5)	0,002 (8)	0,86 (7)	0,97 (7)	1,16 (9)

Отмеченные эффекты зависят от относительной толщины конуса, его длины и угла конусности. С увеличением угла конусности влияние ограничений смещений по образующим уменьшается, а влияние ограничений по окружности увеличивается. При $\gamma = 85^\circ$ снижение критического давления при ослаблении

закреплений по окружности составляет 16%. Анализ данных расчетов привел к простым формулам для критического давления. В случае $S3$ справедлива формула (3.2). В случае $S4$

$$k_q = 1,07f(r_k) Z^{0,03}, \quad (3.5)$$

здесь

$$Z = (1 - \nu^2)^{1/2} \frac{L^2}{R_c h}. \quad (3.6)$$

Формулы справедливы при $Z > 30$.

Сравнение расчетных согласно (3.2) и экспериментальных значений k_q [23.14] показано на рис. 23.7. Экспериментальные значения составляют 60—140% от расчетных. Такой разброс можно объяснить несоответствием граничных условий в расчете и эксперименте и влиянием начальных неправильностей.

Приведем некоторые результаты работы [23.26], в которой рассмотрен большой класс граничных условий. Оказывается, что коэффициент k_q зависит только от двух безразмерных параметров Z , r_k и типа граничных условий. Для замкнутых в вершине конических оболочек $r_k = 1$. В этом случае k_q определяется

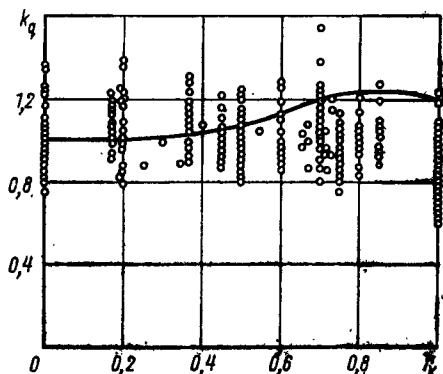


Рис. 23.7. Экспериментальные значения относительного внешнего критического давления конической оболочки.

лишь параметром Z . Зависимость k_q от $z_1 = \sqrt{Z}$ для оболочек с различными граничными условиями показана на рис. 23.8. Для усеченных конических оболочек на рис. 23.9 приведены зависимости безразмерного давления k_q от z_1 для оболочек, имеющих большие значения параметра z_1 ($z_1 = 100$). При дальнейшем увеличении параметра z_1 кривые практически не изменяются. В результате проведенного численного анализа обнаружено, что 12 симметричных граничных условий можно описать двумя кривыми. Кривая 1 соответствует шести граничным условиям S_i ($i = 1, 3, 5, 7, 9, 13$), общим в которых является то, что они не допускают перемещений вдоль образующей. Кривая 2 характеризует шесть граничных условий S_i ($i = 2, 4, 6, 8, 10, 14$), для которых перемещение вдоль образующей не ограничивается. С уменьшением z_1 влияние условия, налагаемого на перемещение вдоль образующей, уменьшается, а значение условий,

налагаемых на угол поворота образующей и прогиб, увеличивается. На рис. 23.10 приведены результаты расчетов для $z_1 = 3$.

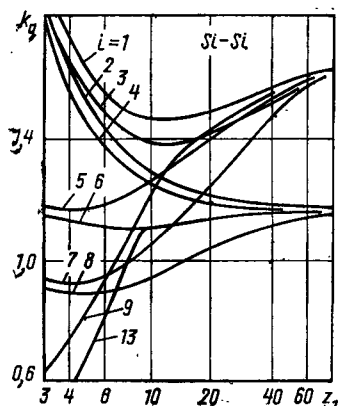


Рис. 23.8. Относительное внешнее критическое давление для конической оболочки в зависимости от параметра z_1 (влияние граничных условий).

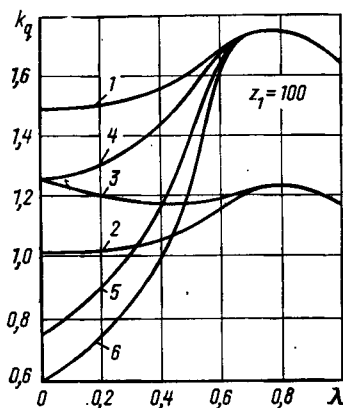


Рис. 23.9. Относительное внешнее критическое давление для конической оболочки при $z_1 = 100$.

Выше при обсуждении, а также на рис. 23.8—23.10 введены следующие обозначения для граничных условий:

$$S1 \quad w = w' = u = v = 0,$$

$$S2 \quad w = w' = T_1 = v = 0,$$

$$S3 \quad w = w' = u = T_{12} = 0,$$

$$S4 \quad w = w' = T_1 = T_{12} = 0,$$

$$S5 \quad w = M_1 = u = v = 0,$$

$$S6 \quad w = M_1 = T_1 = v = 0,$$

$$S7 \quad w = M_1 = u = T_{12} = 0,$$

$$S8 \quad w = M_1 = T_1 = T_{12} = 0,$$

$$S9 \quad Q_1 = w' = u = v = 0,$$

$$S10 \quad Q_1 = w' = T_1 = v = 0,$$

$$S11 \quad Q_1 = w' = u = T_{12} = 0,$$

$$S12 \quad Q_1 = w' = T_1 = T_{12} = 0,$$

$$S13 \quad Q_1 = M_1 = u = v = 0,$$

$$S14 \quad Q_1 = M_1 = T_1 = v = 0,$$

$$S15 \quad Q_1 = M_1 = u = T_{12} = 0,$$

$$S16 \quad Q_1 = M_1 = T_1 = T_{12} = 0.$$

Для анализа влияния несимметричных граничных условий, когда большее и меньшее основания закреплены различным образом, при больших значениях z_1 удобно ввести три семейства граничных условий I ($i = 1, 3, 5, 7, 9, 13$), II ($i = 2, 4, 6, 8, 10, 14$), III ($i = 11, 12, 15, 16$). Семейство I содержит условие $u = 0$, семейство II — условие $T_1 = 0$, семейство III — условия $Q_1 = v = 0$. Оказывается, что для конических оболочек с большими значениями z_1 все несимметричные комбинации гранич-

ных условий можно разделить на пять групп. Зависимости k_q для этих групп представлены на рис. 23.9. Первая группа (кривая 1), состоящая из 36 комбинаций граничных условий, характерна тем, что оба граничных условия (на большем и меньшем) основаниях лежат в семействе I. Также к одинаковым значениям k_q приводят 36 комбинаций граничных условий второй группы (кривая 2), когда оба условия лежат в семействе II. Третья группа характерна тем, что на меньшем основании взято одно из условий семейства I, а на большем — одно из условий семейства II. При этом k_q характеризуется кривой 3. Четвертая группа (кривая 4) отличается тем, что на меньшее основание налагается одно из условий семейства II, а на большее — одно из условий семейства I. Пятую группу составляют 24 комбинации граничных условий, когда на меньшем основании взято одно из условий семейства III, а на большем — одно из условий семейства I. При этом кривая 5 соответствует условиям S11, S12, а кривая 6 — условиям S15, S16.

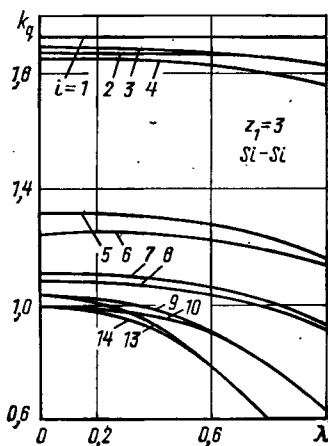


Рис. 23.10. Относительное внешнее критическое давление для конической оболочки при $z_1 = 3$.

§ 4. Кручение

Рассмотрим усеченную коническую оболочку, нагруженную по краям крутящими моментами M_k . Исходное состояние считаем безмоментным. Сдвигающее усилие в оболочке определяется формулой Бредта

$$S^0 = \frac{M_k}{2\pi r^2}. \quad (4.1)$$

Решение уравнений устойчивости в этом случае можно получить, задавая смещения в виде [23.4]

$$\begin{aligned} u &= Ae^z [\sin(\lambda_1 z + n\varphi) - \sin(\lambda_2 z + n\varphi)], \\ v &= Be^z [\sin(\lambda_1 z + n\varphi) - \sin(\lambda_2 z + n\varphi)], \\ w &= -Ce^z \sin(\lambda z + n\varphi) \sin m_1 z. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь

$$z = \ln \frac{s}{a}, \quad m_1 = \frac{\pi}{\zeta}, \quad \zeta = \ln \left(1 + \frac{L}{a} \right), \quad \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \quad (4.3)$$

Смещения (4.2) обращаются в нуль при $z = 0, \xi$. Методом Релея — Ритца в [23.4] найдено следующее выражение для сдвигающего усилия на меньшем основании:

$$S^0 = \frac{Eh(\rho^2 - 1)\xi}{4(\pi^2 + \xi^2)} \varepsilon^{5/2} c_0 \operatorname{ctg}^2 \gamma, \quad (4.4)$$

$$\rho = 1 + \frac{L}{a}, \quad \varepsilon^2 \frac{\pi h}{\xi^{3/2} a \operatorname{ctg} \gamma \sqrt{1 - \nu^2}} \left[\frac{\pi^2 + \xi^2}{6(\rho^2 - 1)} \right]^{1/2}, \quad (4.5)$$

$$c_0 = 2,61 \left(\frac{\nu_1}{\varepsilon} \right) \left[1 + 0,33 \left(\frac{\varepsilon}{\nu_1} \right)^{2/3} (1 + \nu_1) \right], \quad \nu_1 = \frac{1}{2(1 + \nu)}.$$

Формула (4.4) применима при $\varepsilon \leq 0,1$.

В работе [23.14] получена приближенная формула для критического момента

$$M_k = 16,2\pi D \left(\frac{h}{L \cos \gamma} \right)^{1/2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{1 + r_2/r_0}{2} \right)^{1/2} - \left(\frac{2}{1 + r_2/r_0} \right)^{1/2} \right] \frac{r_0 \cos \gamma}{h} \right\}^{5/4}. \quad (4.6)$$

Экспериментальные значения критического момента [23.14] оболочек из майлара отличаются от расчетных в такой же мере, как и в случае цилиндрической оболочки. Поэтому формулу (4.6) можно использовать с поправками, рекомендованными для цилиндра. Такие же результаты получены и в [23.9] на оболочках из алюминиевого сплава.

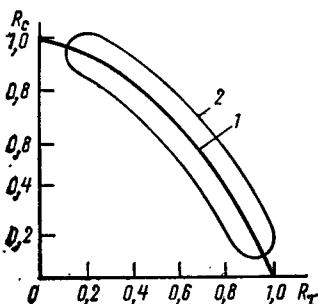


Рис. 23.11. Относительные значения критических напряжений от осевого сжатия и касательных напряжений от кручения.

§ 5. Кручение и осевое сжатие

Эта задача экспериментально исследовалась в работе [23.10], в которой было испытано большое количество заземленных оболочек из майлара. Для кривой взаимодействия нагрузок рекомендована зависимость

$$R_c + R_\tau^2 = 1, \quad (5.1)$$

где R_c, R_τ — отношения критических нагрузок к их величинам при раздельном действии сжатия и кручения согласно (2.9), (4.6), умноженным на эмпирический коэффициент

$$c = 1 - 0,9 \{ 1 - \exp [- (1/16) (r_0/h \cos \gamma)^{1/2}] \}. \quad (5.2)$$

Зависимость (5.1) вместе с данными эксперимента (область точек 2) показаны на рис. 23.11.

Г л а в а XXIV

СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

§ 1. Уравнения

Уравнения сферической оболочки (рис. 24.1) можно получить из общих уравнений первой части книги, если в них подставить коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны

$$A = R, \quad B = R \sin \theta, \quad k_1 = k_2 = R^{-1} = k. \quad (1.1)$$

В качестве криволинейных координат α, β приняты долгота θ и широта φ . Выпишем, например, основные уравнения устойчивости технической теории оболочек (гл. III), нагруженных симметрично относительно оси, перпендикулярной плоскости экватора:

кинематические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= k(u_\theta - w + k w_\theta^0 w_\theta), & \varepsilon_{22} &= k \left(\frac{v_\varphi}{\sin \theta} + u \operatorname{ctg} \theta - w \right), \\ \varepsilon_{12} &= k \left(\frac{u_\varphi}{\sin \theta} + v_\theta - v \operatorname{ctg} \theta + k \frac{w_\theta^0 w_\varphi}{\sin \theta} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \chi_2 &= k^2 L(w), \quad \chi_1 = k^2 w_{\theta\theta}, \quad L(\cdot) = \frac{(\cdot)_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} + \operatorname{ctg} \theta (\cdot)_\theta, \\ \tau &= k^2 \left(\frac{w_{\theta\varphi}}{\sin \theta} - \operatorname{ctg} \theta \frac{w_\varphi}{\sin \theta} \right); \end{aligned} \quad (1.3)$$

уравнения устойчивости

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w - R \nabla^2 F - L(F) w_{\theta\theta}^0 - \operatorname{ctg} \theta w_\theta^0 F_{\theta\theta} - \\ - R^2 [T_1^0 w_{\theta\theta} + T_2^0 L(w)] = 0, \\ \nabla^4 F + E h [R \nabla^2 w + L(w) w_{\theta\theta}^0 + \operatorname{ctg} \theta w_\theta^0 w_{\theta\theta}] = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь w^0, T_1^0, T_2^0 — прогибы и усилия в исходном состоянии. При безмоментном исходном состоянии в уравнениях следует положить $w^0 = 0$. Кроме того, использованы следующие обозначения:

$$\nabla^2(\cdot) = (\cdot)_{\theta\theta} + \operatorname{ctg} \theta (\cdot)_\theta + \frac{(\cdot)_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta}; \quad \nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2. \quad (1.5)$$

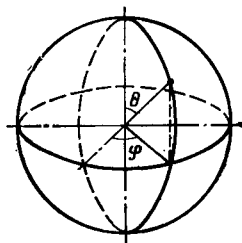


Рис. 24.1. Координаты сферической оболочки.

Для части сферы большого диаметра можно использовать уравнения пологих оболочек:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - R\nabla^2 F - F_{\varphi\varphi} w_{\theta\theta}^0 - R^2(T_1^0 w_{\theta\theta} + T_2^0 w_{\varphi\varphi}) &= 0, \\ \nabla^4 F + Eh(R\nabla^2 w + w_{\varphi\varphi} w_{\theta\theta}^0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx 1, \quad \operatorname{ctg} \theta \approx 0, \quad L(\cdot) = (\cdot)_{\varphi\varphi}, \\ \nabla^2(\cdot) &= (\cdot)_{\theta\theta} + (\cdot)_{\varphi\varphi}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

§ 2. Внешнее давление. Полная сфера

Рассмотрим сферу, нагруженную внешним равномерным давлением q . Впервые эта задача решалась Цолли [24.19] и Л. С. Лейбензоном [24.4]. Под действием давления в оболочке возникнут усилия:

$$T_1^0 = T_2^0 = -\frac{qR}{2} = -N, \quad (2.1)$$

где N — сжимающее усилие. Прогибы в исходном состоянии будут постоянными:

$$w^0 = \frac{qR^2(1-\nu)}{2Eh}. \quad (2.2)$$

Будем считать, что при потере устойчивости образуется много вмятин, так что в пределах вмятины оболочку можно рассматривать как пологую. Из уравнений (1.6) получаем уравнения:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - R\nabla^2 F + R^2 N \nabla^2 w &= 0, \\ \nabla^4 F + EhR \nabla^2 w &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Исключая F , получаем одно уравнение

$$D\nabla^2 \nabla^4 w + EhR^2 \nabla^2 w + R^2 N \nabla^4 w = 0. \quad (2.4)$$

Используя метод Власова, полагаем

$$\nabla^2 w = -\lambda^2 w. \quad (2.5)$$

Из (2.4) при этом следует уравнение

$$D\lambda^4 + EhR^2 - R^2 N \lambda^2 = 0, \quad (2.6)$$

отсюда

$$N = \frac{D}{R^2} \lambda^2 + \frac{Eh}{\lambda^2}. \quad (2.7)$$

Из условия минимума $\partial N / \partial \lambda^2 = 0$ находим

$$\lambda^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{R}{h}, \quad (2.8)$$

при этом

$$N = \frac{Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)} R}. \quad (2.9)$$

Получили формулу, аналогичную формуле Лоренца — Тимошенко для цилиндрической оболочки. Критическое давление при этом равно

$$q_b = \frac{2N}{R} = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)} R^2} \quad (2.10)$$

Это верхнее классическое критическое давление для сферической оболочки.

§ 3. Полусфера. Влияние граничных условий и моментности исходного состояния*)

Рассмотрим половину сферической оболочки, нагруженной внешним давлением. Край сферы считаем закрепленным. В этом случае исходное состояние оболочки будет моментным. Прогибы в исходном состоянии определяются решением уравнения нелинейного краевого эффекта.

Значения $k_q = q/q_b$ показаны в табл. 24.1 для восьми вариантов граничных условий в нейтральном состоянии.

ТАБЛИЦА 24.1

S1	S2	S3	S4	C1	C2	C3	C4
0,516	0,781	0,783	0,792	0,788	0,801	0,801	0,805
0,516	0,894	0,895	0,905	0,895	0,900	0,908	0,913
0,516	0,934	0,935	0,941	0,934	0,942	0,946	0,946
0,516	0,677	0,701	0,703	0,762	0,764	0,772	0,772
0,516	0,806	0,808	0,828	0,836	0,857	0,857	0,865
0,516	0,876	0,900	0,915	0,932	0,948	0,953	0,957

Верхняя часть таблицы соответствует защемленной в исходном состоянии оболочке, нижняя — опертой оболочке. В обеих частях таблицы первая строка получена с учетом моментности нелинейного краевого эффекта, вторая строка — без учета искривлений элементов ($w_{xx}^0 = 0$), третья строка — с учетом моментности линейного краевого эффекта.

В случае S1 моментность исходного состояния не влияет на устойчивость оболочки. Критическое давление при этом оказывается вдвое меньше классического. В остальных случаях влияние моментности существенно. К снижению критического давления приводят как искривления меридиана оболочки, так

*) Это влияние с помощью алгоритма, описанного в [6.19], исследовал В. И. Мяченков [24.5], результаты которого приводятся ниже, в §§ 3, 4, 6.

и окружные усилия моментного состояния. Влияние искривлений при этом несколько больше. Существенно сказывается и нелинейность поведения оболочки в исходном состоянии. Снижение критического давления за счет линейного краевого эффекта достигает, например, в случае классического свободного опирания (S3) 10%, в случае защемления (C4) — 6%, а за счет нелинейного краевого эффекта — соответственно 30% и 20%. Напомним, что для цилиндрической оболочки при осевом сжатии снижение критического усилия за счет моментности исходного состояния составляло 16 и 8% для опертой и защемленной оболочек соответственно.

§ 4. Локальные осесимметричные нагрузки

Рассмотрим сферическую оболочку, нагруженную равномерно распределенными по экватору радиальными силами Q . Прогиб в исходном состоянии определяется решением уравнения краевого эффекта

$$w^0 = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \frac{Q^* h}{\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\mu|\gamma|} (\sin \mu|\gamma| + \cos \mu\gamma), \quad (4.1)$$

где

$$Q = Q^* \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}, \quad \mu = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}}, \quad \gamma = \theta - \frac{\pi}{2}. \quad (4.2)$$

В [24.5] получено $Q^* = 1,051$. Без учета искривлений меридиана $Q^* = 1,51$. При нагружении опертого края ($w^0 = 0$) половины сферической оболочки изгибающими моментами M прогиб в исходном состоянии определяется выражением

$$w^0 = \frac{2\sqrt{3}M^*h}{\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\mu\gamma} \sin \gamma, \quad (4.3)$$

где

$$M = M^* \frac{Eh^2}{1-\nu^2} \frac{h}{R}. \quad (4.4)$$

Значения параметра M для восьми вариантов граничных условий показаны ниже:

S1	S2	S3	S4	C1	C2	C3	C4
$M^* = 0,98$	2,16	0,98	2,20	1,44	2,22	1,50	2,23
$M_0^* = 1,14$	1,22	1,23	1,26	1,49	1,52	1,52	1,54

При этом параметр M_0^* был получен без учета искривлений меридиана в исходном состоянии. Наибольшее влияние на величину критического момента оказывает ограничение смещений вдоль меридиана. Ограничение окружного перемещения влияет слабо. Наименее устойчива оболочка в вариантах S1, S3.

§ 5. Устойчивость при нагреве

Рассмотрим закрепленную по контуру на жесткой в своей плоскости диафрагме половину равномерно нагретой сферической оболочки радиуса R , толщины h . Разность в температурах оболочки и диафрагмы t . Прогиб, изменение кривизны меридиана и температурные окружные усилия в оболочке определяются выражениями:

$$w^0 = \alpha_t R t \left(\frac{1}{2} f_1 - 1 \right), \quad \chi_1^0 = -k_2 t_1 f_2, \quad T_2^0 = -\frac{E h \alpha_t t}{2} t_1 = T_k, \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e^{-k_1 \eta} (\cos k_1 \eta + \alpha_1 \sin k_1 \eta), \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ f_2 &= 2e^{-k_1 \eta} (\alpha_1 \cos k_1 \eta - \sin k_1 \eta), \quad t_1 = \frac{t}{t_b} = k_t, \\ \eta &= \frac{x}{\theta}, \quad \theta^2 = \frac{hR}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad t_b = \frac{h}{\alpha_t R \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь ν , α_t , E — коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения и модуль нормальной упругости материала оболочки; $\alpha_1 = 0$ при свободном опирании оболочки на диафрагму ($w^0 = \chi_1^0 = 0$), при защемлении оболочки на диафрагме ($w^0 = w_x^0 = 0$) $\alpha_1 = 1$; x — координата по меридиану с началом на диафрагме. Графики функций f_1 , f_2 показаны на рис. 21.1 сплошными (защемленная оболочка) и пунктирными (свободно опертая оболочка) линиями.

Устойчивость докритического равновесного состояния исследуем, используя решение в конечных разностях гл. VI, в котором t_1 , f_1 , f_2 следует взять согласно (5.2) и положить $N = 0$, $k_1^* = 1$, $P^* = 0$. В нейтральном состоянии при $x = 0$ рассмотрим варианты граничных условий S3, C3, соответствующие классическому случаю свободного опирания и неполному защемлению. Матрицы G и D имеют вид

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

в случае C3. В случае S3 матрица $G = 0$, а $D = 1$. Уравнение для критической температуры в случае S3 имеет вид $|M_0| = 0$.

Поскольку напряжения имеют локальный характер, можно рассматривать только часть оболочки длиной l по меридиану. При $x = l$ поставим условие затухания напряженно-деформированного состояния, считая $M_m = 0$. В расчетах необходимо варьировать величину l и шаг сетки, добиваясь сходимости результатов. В. В. Кабановым [6.12] получено при $\eta_m = 15$, $m = 200$, $k_t = 37,35$ для опертой оболочки, $k_t = 8,41$ — для защемленной оболочки. При этом параметр β соответственно равен 3,7, 1,75.

Рассмотрим далее полную сферическую оболочку, одна половина которой имеет температуру t , вторая — температуру, равную нулю. Поместим начало координаты x на параллели раздела нагретой и ненагретой частей оболочки, направив ось x в сторону нагретой части. Изменение кривизны меридиана и температурные усилия в докритическом состоянии определяются выражениями (5.1), в которых

$$f_1 = e^{-k_1 |\eta|} \cos k_1 \eta \operatorname{sign} \eta, \quad f_2 = -e^{-k_1 |\eta|} \sin k_1 |\eta| \operatorname{sign} \eta. \quad (5.4)$$

Прогибы в докритическом состоянии определяются зависимостью

$$w^0 = \alpha_t R t \left(\frac{1}{2} f_1 - \epsilon \right). \quad (5.5)$$

$\epsilon = 1$ при $\eta \geq 0$, $\epsilon = 0$ при $\eta \leq 0$. При $\eta_m = 10$, $m = 800$ В. В. Кабановым найдено $k_t = 35,5$, $\beta = 2,71$. В случае безмоментного исходного состояния ($f_2 = 0$) получено $k_t = 12,08$, $\beta = 1,15$. Полученные результаты указывают на существенное влияние моментности исходного состояния как на величину критической температуры, так и на форму потери устойчивости. Искривления меридиана в исходном состоянии повышают устойчивость оболочки. При этом число волн по окружности увеличивается.

§ 6. Комбинированное нагружение

Рассмотрим сферическую оболочку под действием внешнего давления и радиальных усилий, приложенных по экватору. В этом случае прогиб в исходном состоянии равен

$$w^0 = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \frac{Q^* h}{\sqrt{1-v^2}} e^{-\mu_2 |\gamma|} \left(\frac{\sin \mu_1 |\gamma|}{\sqrt{1+k_q}} + \frac{\cos \mu_1 \gamma}{\sqrt{1-k_q}} \right) + \frac{k_q h}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}, \quad (6.1)$$

где

$$\mu_1 = \mu \sqrt{1+k_q}, \quad \mu_2 = \mu \sqrt{1-k_q}, \quad \mu = \sqrt[4]{3(1-v^2)} \sqrt{\frac{R}{h}}, \quad (6.2)$$

$$Q = Q^* \frac{Eh}{(1-v^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}, \quad k_q = q \frac{2E}{\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{h^2}{R^2}. \quad (6.3)$$

Окружное усилие определяется выражением

$$T_2^0 = -\frac{Eh}{R} \left[\frac{\sqrt[4]{3}}{2} \frac{Q^*h}{\sqrt{1-\nu^2}} e^{-\mu_1|\gamma|} \left(\frac{\sin \mu_1|\gamma|}{\sqrt{1+k_q}} + \frac{\cos \mu_1\gamma}{\sqrt{1-k_q}} \right) + \frac{k_q h}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \right]. \quad (6.4)$$

Результаты расчетов показаны на рис. 24.2. Кривая 1 получена с учетом нелинейности краевого эффекта, кривая 2— без учета искривлений меридиана, 4— с учетом линейного краевого эффекта, 3— без учета искривлений меридиана при линейном краевом эффекте. Пунктиром нанесены прямые a и b .

Возьмем полусферу и нагрузим ее внешним давлением и краевыми изгибающими моментами. В исходном состоянии на крае $\omega^0 = 0$. Для прогиба в исходном состоянии имеем выражение

$$\omega^0 = \frac{k_q h}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}} \left[1 + e^{-\mu_2\gamma} \left(\frac{k_q}{\sqrt{1-k_q^2}} \sin \mu_1\gamma - \cos \mu_1\gamma \right) \right] + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{M^*}{\sqrt{1-k_q^2}} e^{-\mu_2\gamma} \sin \mu_1\gamma, \quad (6.5)$$

здесь

$$M = M^* \frac{Eh^2}{1-\nu^2} \frac{h}{R}, \quad q = k_q \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{h^2}{R^2}. \quad (6.6)$$

Окружные усилия определяются зависимостью

$$T_2^0 = -\frac{Eh}{R} \left\{ \frac{k_q h}{3\sqrt{1-\nu^2}} + e^{-\mu_2\gamma} \left[\frac{k_q h}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{k_q}{\sqrt{1-k_q^2}} \sin \mu_1\gamma - \cos \mu_1\gamma \right) - \frac{2\sqrt{3} M^* h}{\sqrt{1-\nu^2} \sqrt{1-k_q^2}} \sin \mu_1\gamma \right] \right\} \quad (6.7)$$

На рис. 24.3 сплошными кривыми приведены результаты расчетов для случая граничных условий S3. Пунктиром показаны результаты, полученные без учета искривлений меридиана.

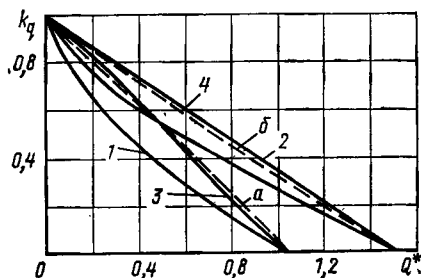


Рис. 24.2. Относительные критические величины внешнего давления и радиальных усилий, приложенных по параллели сферической оболочки

Кривые 1 и 2 получены с учетом, а кривые 3 и 4 без учета нелинейности краевого эффекта. Полученные результаты близки к результатам для цилиндрической оболочки. Различие имеется при малых значениях параметра M^* . Таким образом, краевые моменты снижают величину критического давления.

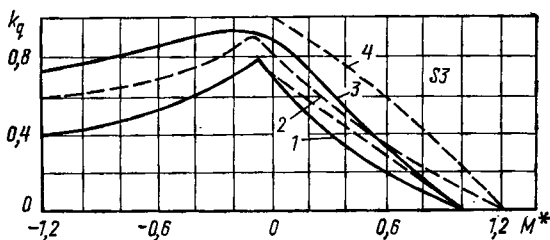


Рис. 24.3. Относительные критические величины внешнего давления и изгибающих моментов, приложенных к краю сферической оболочки.

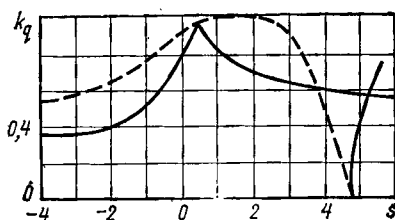


Рис. 24.4. Относительные критические величины внешнего давления и температуры сферической оболочки.

В заключение рассмотрим задачу устойчивости половины нагретой сферической оболочки, нагруженной внешним давлением. Разность температур оболочки и опорного контура t . Считая оболочку защемленной на контуре ($w^0 = w_\theta^0 = 0$), получим

$$w^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[\frac{k_q h (1-v)}{\sqrt{3}} - \zeta h \right] \times \\ \times \left[1 - e^{-\mu_1 \gamma} \left(\sqrt{\frac{1-k_q}{1+k_q}} \sin \mu_1 \gamma + \cos \mu_1 \gamma \right) \right], \quad (6.8)$$

$$T_2^0 = -\frac{Eh}{R} \left\{ \left(\frac{\zeta h}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{k_q h}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \right) e^{-\mu_1 \gamma} \times \right. \\ \left. \times \left(\sqrt{\frac{1-k_q}{1+k_q}} \sin \mu_1 \gamma + \cos \mu_1 \gamma \right) + \frac{k_q h}{\sqrt{3(1-v^2)}} \right\},$$

здесь

$$t = \frac{\xi}{\alpha_t \sqrt{1 - \nu^2}} \frac{h}{R}, \quad q = k_q \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)} R^2}. \quad (6.9)$$

Результаты расчетов показаны на рис. 24.4 сплошной линией. Эта кривая похожа на кривую для нагретой цилиндрической оболочки, нагруженной осевым сжатием. Пунктиром показана кривая, полученная без учета нелинейности краевого эффекта.

§ 7. Влияние начальных неправильностей

Чувствительность сферических оболочек к начальным неправильностям формы изучалась в работах [24.11, 24.13]. В первой работе рассматривались осесимметричные, а во второй — неосесимметричные регулярные неправильности. Результаты этих работ свидетельствуют о том, что сферические оболочки чувствительны к начальным несовершенствам в такой же мере, как и цилиндрические оболочки.

Немногочисленные имеющиеся эксперименты [24.14] показывают, что верхнее критическое давление в эксперименте не достигается. Величина отношения экспериментального критического давления к расчетному в зависимости от точности изготовления оболочек колеблется в пределах 0,25—0,9. Большие значения этого отношения получены при испытаниях тщательно изготовленных оболочек в эксперименте Кренцке [24.14].

§ 8. Пологие сферические панели

Пологие сферические панели (рис. 24.5), как и круговая цилиндрическая оболочка, являются весьма удобной моделью для исследования особенностей нелинейного поведения оболочек. Им посвящена обширная литература. На рис. 24.6 кривой *C4* показано верхнее критическое давление, отнесенное к критическому давлению сферической оболочки того же радиуса, полученное Вейничке [24.18] для жестко защемленной по краям панели. Причудливая форма кривой объясняется сложной зависимостью характера волнообразования от геометрии панели. При малых зна-

чениях параметра $b = \sqrt{12(1 - \nu^2)} a / Rh$ панель продавливается по центру с образованием осесимметричной вмятины. Критическое давление при этом меньше критического давления полной сферы. Краевой эффект не проявляется. С увеличением параметра b увеличивается подъемистость оболочки, давление растет, начинает влиять краевой эффект. По меридиану оболочки образуется несколько волн. При этом максимальный прогиб не всегда совпадает с центром панели. При больших значениях

параметра b сильное влияние краевого эффекта снова приводит к снижению критического давления. Влияние граничных условий на величину критической нагрузки при осесимметричном деформировании было изучено численно в работах В. П. Стегния и

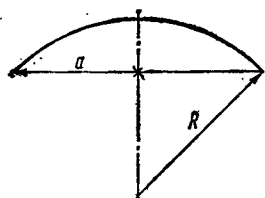


Рис. 24.5. Пологая сферическая панель.

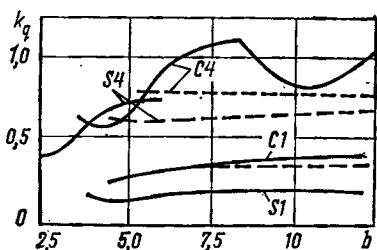


Рис. 24.6. Относительное критическое давление пологих сферических панелей

Н. В. Валишвили [24.1]. Пределы применимости уравнений теории пологих оболочек при исследовании критических нагрузок сферических оболочек изучались Дж. Месколлом [24.15], а для различных случаев их закрепления по контуру — Э. И. Григолюком, В. И. Мамаем и А. Н. Фроловым [24.3], а также Н. В. Валишвили и Л. К. Гореловым [24.1]. Суммарная погрешность в величине критической нагрузки до параметра $b = 10$ не превышает $5 \div 10\%$. Величины критических нагрузок для различных граничных условий ($S1$, $S4$, $C1$, $C4$) в зависимости от параметра пологости показаны на рис. 24.6 сплошными линиями.

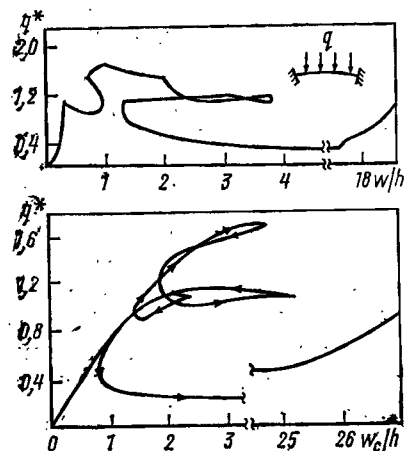


Рис. 24.7. Зависимость относительное давление — относительный прогиб пологой сферической панели

Полное решение нелинейной задачи найдено Месколлом [24.15] для жестко защемленной панели. В этой работе при значениях $b \approx 9$ получены зависимости давление — прогиб с пет-

лями, показывающими (рис. 24.7) на существование многих равновесных форм (w — прогиб в центре панели, w_c — осредненный по поверхности панели прогиб). На кривой рис. 24.7 имеются предельные точки и точка разветвления решения. Первый мак-

симум кривой совпадает с критическим давлением, полученным в решениях Вейничке [24.18] и Терстона [24.17].

Неосесимметричные формы потери устойчивости впервые исследованы Э. И. Григолюком [22.1] методом Бубнова. Впоследствии численные исследования были проведены Вейничке [24.18], Хуаном [24.10] и др.

В работе [24.1] численно решена задача несимметричной устойчивости и изучено влияние граничных условий. При этом исходное состояние оболочки считалось нелинейным. Осесимметричная форма потери устойчивости реализуется при значениях параметра $b = b_0$. Величина b_0 зависит от граничных условий. Шарнирному и жестко защемленному контуру соответствует b_0 , равное 4 и 5,5. При подвижном шарнире и подвижном защемлении $b_0 = 13,7$. Неосесимметричное волнообразование с одной полуволной по меридиану появляется хлопком при $b > b_0$. На исходной ветви нагрузка — прогиб ниже предельной точки возможно появление нескольких точек разветвления решения, соответствующих различным формам волнообразования. Критическое давление сильно зависит от граничных условий. За счет подвижности контура по меридиану его величина снижается в несколько раз. Результаты потери устойчивости по неосимметричной форме для граничных условий $S1$, $S4$, $C1$, $C4$ показаны на рис. 24.6 пунктиром.

Результаты тщательно поставленных экспериментов с точечными жестко защемленными панелями из алюминиевого сплава неплохо подтверждают расчетные данные. Расхождение опытных и расчетных значений критического давления [24.14] составляет 2,5—27%. При этом большая величина расхождения соответствует подъемистым панелям ($b > 14$).

Большое количество работ выполнено по определению нижнего критического давления [6.6] сферических панелей. Полученные значения давления колеблются в широких пределах и указывают, как и в случае круговой цилиндрической оболочки, на сильную зависимость его от аппроксимации прогибов.

§ 9. Сферическая полая панель под действием сосредоточенной силы

Нелинейное осесимметричное деформирование свободно опёртой панели исследовал впервые К. Бицено [24.6]. Месколл [24.15] основывался на нелинейных уравнениях Рейсснера [24.16], пригодных при малых деформациях и произвольных поворотах, и обычных уравнениях, справедливых при малых поворотах, которые применялись во многих других исследованиях [24.10, 24.18]. Использовался метод Ньютона и метод конечных разностей. На рис. 24.8 показана зависимость нагрузка — прогиб для панели с параметром $b \approx 10$. Характерно множество равновесных со-

стояний, соответствующих и положительным, и отрицательным значениям нагрузки. Первый максимум в зависимости дает предельную точку. Ниже ее имеется точка разветвления решения. Отмечается, что другие равновесные формы не являются смежными, и переход к ним требует конечных прогибов. В работе не обнаружено существенного различия решений точных и приближенных уравнений. При малых значениях параметра b кривые

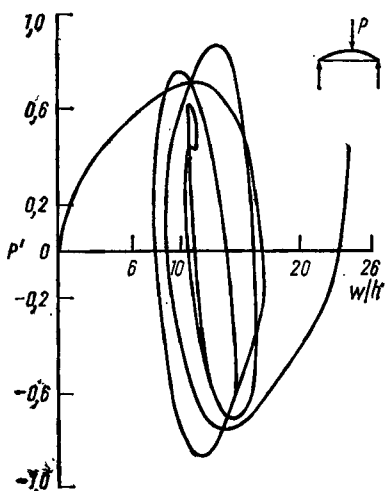


Рис. 24.8. Зависимость относительная критическая сила — относительный прогиб пологой сферической панели.

монотонно возрастают до предельной точки. Значения предельного давления согласуются с полученными в эксперименте.

На рис. 24.9 показаны согласно обзору [24.76] результаты ($P^* = PR/2\pi D$) вычислений

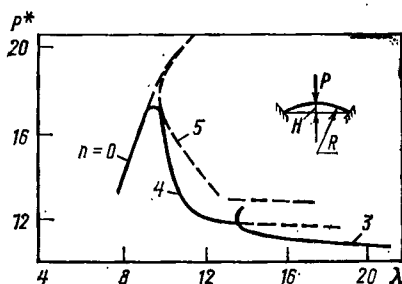


Рис. 24.9. Относительная величина критической силы и числа волн пологой сферической панели.

критической силы жестко защемленной панели, где указаны и числа волн. При малых значениях параметра

$\lambda = 2\sqrt{3(1-\nu^2)}(H/h)^{1/2}$ реализуется осесимметричная форма потери устойчивости. При больших значениях λ наблюдается бифуркация форм равновесия. Неосесимметричные формы равновесия ($n = 3, 4, 5$) ответвляются от осесимметричных при малых значениях давления. Такое трех-, четырех- и пятидольное деформирование поверхности панели наблюдалось в экспериментах [24.9]. Критическое давление при этом трудно зафиксировать: деформирование происходит мягко, без хлопков при возрастающей нагрузке. По-видимому, при таком случае нагружения панель будет нечувствительной к начальным несовершенствам. В предельном случае (большие λ) можно предположить, что для сферы, нагруженной диаметрально приложенными сосредоточенными силами, параметр $P^* = 11$.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Глава XXV

УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные понятия

Результаты, полученные в предыдущих главах, относятся к случаю упругого поведения материала. Эти результаты применимы к тонким оболочкам. Так, например, в случае осевого сжатия согласно формуле Лоренца — Тимошенко относительная толщина h/R дюралюминиевой оболочки должна быть меньше $1/200$. При большей толщине оболочка может потерять устойчивость за пределом упругости. Основы расчета конструкций на устойчивость за пределом упругости были заложены работами по устойчивости стержней. Поэтому, прежде чем обсуждать постановки задач устойчивости оболочек, рассмотрим вкратце историю этого вопроса.

В 1895 г. Энгессер [25.12] распространил критерий Эйлера на стержни, теряющие устойчивость за пределом упругости. Согласно этому критерию переход из исходного состояния в смежное совершается при постоянной нагрузке. В изогнутом состоянии стержня (рис. 25.1) напряжения на вогнутой стороне за счет изгиба возрастут, а на выпуклой — уменьшатся, т. е. изгиб на вогнутой стороне оказывает догружающее, а на выпуклой — разгружающее действие. При разгрузке зависимость $\sigma - \epsilon$ будет линейной, характеризуемой модулем упругости E , а при догрузке — нелинейной, характеризуемой касательным модулем

$$E_k = \frac{d\sigma}{d\epsilon}. \quad (1.1)$$

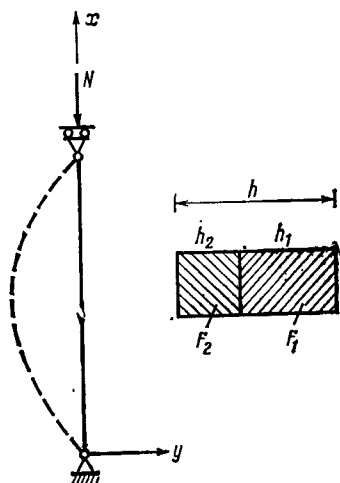


Рис. 25.1. Центально сжатый стержень.

Из условия равенства нулю равнодействующей изгибных напряжений

$$\frac{E_K}{\rho} \int_{F_1} y dF + \frac{E}{\rho} \int_{F_2} y dF = 0 \quad (1.2)$$

находим границу раздела зон догрузки и разгрузки.

Здесь F_1 , F_2 — площади поперечного сечения стержня с догрузкой и разгрузкой, ρ — радиус кривизны линии раздела — нейтральной линии. Если приравнять нулю сумму моментов внутренних сил внешнему моменту

$$\frac{E_K}{\rho} \int_{F_1} y^2 dF + \frac{E}{\rho} \int_{F_2} y^2 dF = M, \quad (1.3)$$

получаем уравнение нейтральной линии

$$E_{\text{пр}} I w_{xx} = -M, \quad (1.4)$$

которое отличается от уравнения упругого стержня приведенным модулем (приведенный модуль Энгессера)

$$E_{\text{пр}} = (E_K I_1 + E I_2) / I, \quad (1.5)$$

где I_1 , I_2 — моменты инерции частей сечения стержня с догрузкой и разгрузкой. Приведенный модуль $E_{\text{пр}}$ зависит не только от модулей E_K и E , но и от формы поперечного сечения. При этом зависимость от формы поперечного сечения слабая [4.16], так что можно использовать приведенный модуль для прямоугольного поперечного сечения. В этом случае уравнение (1.2) дает

$$E_K h_1^2 - E h_2^2 = 0,$$

отсюда

$$h_1 = h \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E_K} + \sqrt{E}}, \quad h_2 = h \frac{\sqrt{E_K}}{\sqrt{E_K} + \sqrt{E}},$$

так что $I_1 = b h_1^3 / 3$, $I_2 = b h_2^3 / 3$, $I = b h^3 / 3$.

Следовательно, приходим к известной формуле

$$E_{\text{пр}} = \frac{4 E E_K}{(\sqrt{E_K} + \sqrt{E})^2}. \quad (1.6)$$

Величина $E > E_{\text{пр}} > E_K$. При $E_K = E$ имеем $E_{\text{пр}} = E$. Для имеющих площадку текучести материалов $E_{\text{пр}} = 0$. Следовательно, критические напряжения стержней из таких материалов не могут превысить предела текучести. Еще в более ранней работе (1889 г.) [25.11] Энгессер определил критическую силу неупругого стержня, заменив в формуле Эйлера для упругого стержня модуль E на касательный модуль E_K . Соответствующая критическая нагрузка известна как энгессерова, или касательно-модульная критическая нагрузка. Она несколько меньше приве-

денно-модульной нагрузки и может быть реализована только при допущении продолжающегося в процессе потери устойчивости нагружения, поскольку при этом предполагается отсутствие зон разгрузки.

Вплоть до работ Шенли [25.16] (1946) и [25.17] (1947) использование критерия приведенно-модульной критической нагрузки не подвергалось сомнению, а решения, основанные на гипотезе отсутствия разгрузки, не вызывали доверия. Шенли при испытании шарнирно опертого стержня путем замера деформаций заметил, что после достижения касательно-модульной нагрузки стержень изгибается и что одновременно растет и сжимающая сила. Таким образом, была подтверждена касательно-модульная нагрузка. Анализ этого эксперимента, проведенный с помощью модели Ридера (двух жестких стержней, соединенных двумя одинаковыми упругими стержнями) послужил основанием для формулировки концепции продолжающегося нагружения и пересмотра классического подхода Эйлера — Энгессера. Концепция продолжающегося нагружения позволяет значительно упростить решение устойчивости оболочек, поскольку при этом нет необходимости определять границу раздела зон разгрузки и догрузки.

При одноосном напряженном состоянии (стержни) расчеты на устойчивость можно производить, пользуясь тем или иным критерием и диаграммой растяжения материала. При двухосном напряженном состоянии (пластины, оболочки) этого оказывается недостаточно. В этом случае необходимо иметь зависимость между напряжениями и деформациями за пределом упругости. Эти зависимости определяются теориями пластичности. Все известные теории пластичности относятся или к деформационным теориям или к теориям течения. В деформационных теориях устанавливаются связи непосредственно между напряжениями и деформациями, а в теориях течения — между малыми приращениями деформаций и напряжений и напряжениями. Из деформационных теорий наибольшее распространение получила теория малых упруго-пластических деформаций, развитая Генкн [25.13] и А. А. Ильюшиным [25.5].

§ 2. Уравнения оболочек по теории малых упруго-пластических деформаций. Теория течения

Исходное состояние. Используя результаты [25.5], выпишем основные соотношения для тонких пологих оболочек, считая напряженное состояние осесимметричным, а материал несжимаемым:

интенсивность напряжений

$$\sigma_i = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\tau_{12}^2)^{1/2}, \quad (2.1)$$

интенсивность деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{1}{4} \gamma_{12}^2 \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

физические соотношения

$$\sigma_{11} = \frac{E_c}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E_c}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \quad (2.3)$$

$$\tau_{12} = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \gamma_{12},$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_c} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E_c} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}), \quad (2.4)$$

$$\gamma_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E_c} \tau_{12}, \quad E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$

кинематические соотношения:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + z\chi_1, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + z\chi_2, \quad \gamma_{12} = \gamma + 2z\tau, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_1 = u_x - k_1 w + 1/2 w_x^2, \quad \varepsilon_2 = v_y - k_2 w + 1/2 w_y^2,$$

$$\gamma = u_y + v_x + w_x w_y, \quad (2.6)$$

$$\chi_1 = -w_{xx}, \quad \chi_2 = -w_{yy}, \quad \tau = -w_{xy}.$$

Интегрируя (2.3) по толщине оболочки, получаем погонные усилия и моменты

$$T_1 = B_c (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + D_1 (\chi_1 + \nu \chi_2), \quad M_1 = D_c (\chi_1 + \nu \chi_2) + D_1 (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2),$$

$$T_2 = B_c (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) + D_1 (\chi_2 + \nu \chi_1), \quad M_2 = D_c (\chi_2 + \nu \chi_1) + D_1 (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad (2.7)$$

$$T_3 = B_c \nu_1 \gamma + 2\nu_1 D_1 \tau, \quad M_3 = 2\nu_1 D_c \tau + \nu D_1 \gamma.$$

Здесь

$$B_c = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_c dz, \quad D_c = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_c z^2 dz, \quad (2.8)$$

$$D_1 = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_c z dz, \quad \nu_1 = \frac{1-\nu}{2}.$$

Коэффициент Пуассона считается постоянной величиной, в пластической зоне $\nu = 0,5$.

Усилия и моменты (2.7) приведены к срединной поверхности оболочки. Если выбрать новую поверхность приведения $z = z_0$

из условия ($D_1 = 0$)

$$\int_{-h/2}^{h/2} E_c(z - z_0) dz = 0, \quad (2.9)$$

выражение (2.7) упрощается. При этом

$$D_c = \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_c(z - z_0)^2 dz, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= B_c(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2), & T_2 &= B_c(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1), \\ M_1 &= D_c(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1), & M_2 &= D_c(\chi_2 + \nu\chi_1), \\ T_3 &= B_c\nu\gamma, & M_3 &= 2\nu D_c\tau. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Разрешая (2.11) относительно деформаций, получаем

$$\epsilon_1 = \frac{1}{B_c(1 - \nu^2)}(T_1 - \nu T_2), \quad \epsilon_2 = \frac{1}{B_c(1 - \nu^2)}(T_2 - \nu T_1), \quad \gamma = \frac{T_3}{B_c\nu}. \quad (2.12)$$

Уравнения равновесия и неразрывности деформаций имеют такой же вид, как и в упругой области:

$$\begin{aligned} k_1 F_{yy} + k_2 F_{xx} + M_{1xx} + 2M_{3xy} + M_{2yy} + F_{yy}w_{xx} + \\ + F_{xx}w_{yy} - 2F_{xy}w_{xy} + q = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\epsilon_{1yy} + \epsilon_{2xx} - \gamma_{xy} - w_{xy}^2 + w_{xx}w_{yy} + k_1 w_{yy} + k_2 w_{xx} = 0,$$

где

$$T_1 = F_{yy}, \quad T_2 = F_{xx}, \quad T_3 = -F_{xy}. \quad (2.14)$$

Подставив в систему (2.13) моменты и деформации (2.11), (2.12), получим нелинейные уравнения упруго-пластических оболочек

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_c} \nabla^4 F + \left[\left(\frac{1}{B_c} \right)_{xx} - \nu \left(\frac{1}{B_c} \right)_{yy} \right] F_{xx} + \\ + \left[\left(\frac{1}{B_c} \right)_{yy} - \nu \left(\frac{1}{B_c} \right)_{xx} \right] F_{yy} + 2(1 + \nu) \left(\frac{1}{B_c} \right)_{xy} F_{xy} + \\ + 2 \left[\left(\frac{1}{B_c} \right)_x (\nabla^2 F)_x + \left(\frac{1}{B_c} \right)_y (\nabla^2 F)_y \right] + \\ + (1 - \nu^2)(k_1 w_{yy} + k_2 w_{xx} - w_{xy}^2 + w_{xx}w_{yy}) = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} D_c \nabla^4 w + (D_{cxx} + \nu D_{cyy}) w_{xx} + (D_{cyy} + \nu D_{cxx}) w_{yy} + \\ + 2[D_{cxy}(\nabla^2 w)_y + D_{cxy}(\nabla^2 w)_x + (1 - \nu) D_{cxy} w_{xy}] - \\ - k_1 F_{yy} - k_2 F_{xx} - F_{yy}w_{xx} - F_{xx}w_{yy} - 2F_{xy}w_{xy} - q = 0. \end{aligned}$$

При осесимметричном исходном состоянии уравнения (2.15) упрощаются:

$$\frac{1}{B_c} F_{xxxx} + \left(\frac{1}{B_c}\right)_{xx} F_{xx} - F_{yy} \nu \left(\frac{1}{B_c}\right)_{xx} + \\ + 2 \left(\frac{1}{B_c}\right)_x (F_{xxx} + F_{yyx}) + (1 - \nu^2) k_2 w_{xx} = 0, \quad (2.16)$$

$$D_c w_{xxxx} + D_{cxx} w_{xx} + 2D_{cx} w_{xxx} - k_1 F_{yy} - \\ - k_2 F_{xx} - F_{yy} w_{xx} - q = 0.$$

Так как при $F_{xyy} = 0$

$$(1 - \nu^2) \varepsilon_{2xx} = \left[\frac{1}{B_c} (F_{xx} - \nu F_{yy}) \right]_{xx} = -(1 - \nu^2) k_2 w_{xx}, \quad (2.17)$$

то первое уравнение обращается в тождество. Второе уравнение приводится к виду

$$D_c w_{xxxx} + 2D_{cx} w_{xxx} + \\ + D_{cxx} w_{xx} - k_1 T_1 - k_2 T_2 - T_1 w_{xx} - q = 0. \quad (2.18)$$

Исключая отсюда T_2 с помощью (2.11)

$$T_2 = B_c (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = B_c \left[\varepsilon_2 + \nu \left(\frac{T_1}{B_c} - \nu \varepsilon_2 \right) \right] = \\ = -B_c (1 - \nu^2) k_2 w + \nu T_1, \quad (2.19)$$

получаем окончательно уравнение, содержащее только прогиб:

$$D_c w_{xxxx} + 2D_{cx} w_{xxx} + (D_{cxx} - T_1) w_{xx} + \\ + B_c (1 - \nu^2) k_2^2 w - \nu k_2 T_1 - k_1 T_1 - q = 0. \quad (2.20)$$

Уравнения устойчивости. Будем считать исходное состояние оболочки однородным и безмоментным. Пусть напряжения и деформации этого состояния σ_j , ε_1^0 , ε_2^0 , γ^0 ($j = 1, 2, 3$). Выражения для дополнительных напряжений и деформаций получим путем варьирования напряжений и деформаций исходного состояния (2.3), (2.5):

$$\varepsilon_{11} = \delta \varepsilon_{11}^0 = \delta \varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + z \chi_1, \quad \varepsilon_{22} = \delta \varepsilon_{22}^0 = \delta \varepsilon_2^0 = \varepsilon_2 + z \chi_2, \\ \gamma_{12} = \delta \gamma_{12}^0 = \delta \gamma^0 = \gamma + 2z\tau, \quad (2.21)$$

$$\sigma_{11} = \delta \sigma_{11}^0 = \delta \sigma_1^0 = \\ = \frac{1}{1 - \nu^2} \{ \delta E_c (\varepsilon_1^0 + \nu \varepsilon_2^0) + E_c [\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 + z (\chi_1 + \nu \chi_2)] \}. \quad (2.22)$$

Величины с индексом «0» относятся к исходному состоянию. Компоненты дополнительных деформаций определяются формулами (2.6), в которых под u , v , w следует понимать смещения

дополнительного состояния. Вычислим вариацию секущего модуля

$$\delta E_c = \delta \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right) = \frac{\delta \sigma_i \varepsilon_i - \sigma_i \delta \varepsilon_i}{\varepsilon_i^2} = \frac{\delta \varepsilon_i}{\varepsilon_i} (E_k - E_c), \quad (2.23)$$

где

$$E_k = \frac{\delta \sigma_i}{\delta \varepsilon_i} = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \quad (2.24)$$

— касательный модуль и, кроме того,

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_i &= \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_i^0} \delta \varepsilon_i^0 + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_2^0} \delta \varepsilon_2^0 + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \gamma^0} \delta \gamma^0 = \\ &= \sigma_1 \delta \varepsilon_1^0 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2^0 + \sigma_3 \delta \gamma^0 = \delta \varepsilon + z \delta \chi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь

$$\delta \varepsilon = \sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 + \sigma_3 \delta \gamma, \quad \delta \chi = \sigma_1 \delta \chi_1 + \sigma_2 \delta \chi_2 + 2\sigma_3 \delta \tau. \quad (2.26)$$

Следовательно,

$$\delta E_c = -E_c E_p \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2} \frac{\delta \varepsilon + z \delta \chi}{\varepsilon_i + \nu \varepsilon_2} = -E_p E_c^2 \frac{\delta \varepsilon + z \delta \chi}{(1 - \nu^2) \sigma_i^2}, \quad (2.27)$$

где

$$E_p = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{E_k}{E_c} \right). \quad (2.28)$$

Подставляя (2.27) в (2.22), получим вариацию осевого напряжения

$$h\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\gamma + z(B_{11}\chi_1 + B_{12}\chi_2 + 2B_{13}\tau), \quad (2.29)$$

здесь

$$B_{11} = B(1 - \delta_{11}), \quad B_{12} = B(\nu - \delta_{12}), \quad B_{13} = -B\delta_{13}, \quad (2.30)$$

$$B = \frac{E_c h}{1 - \nu^2}, \quad \delta_{n,k} = E_p \sigma_n^* \sigma_k^*, \quad \sigma_n^* = \frac{\sigma_n}{\sigma_i}, \quad \sigma_k^* = \frac{\sigma_k}{\sigma_i} \quad (n, k = 1, 2, 3). \quad (2.31)$$

Аналогично получаем вариации окружного и касательного напряжений:

$$h\sigma_{22} = B_{21}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + B_{23}\gamma + z(B_{21}\chi_1 + B_{22}\chi_2 + 2B_{23}\tau), \quad (2.32)$$

$$h\sigma_{12} = B_{31}\varepsilon_1 + B_{32}\varepsilon_2 + B_{33}\gamma + z(B_{31}\chi_1 + B_{32}\chi_2 + 2B_{33}\tau). \quad (2.33)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{21} &= B_{12}, & B_{22} &= B(1 - \delta_{22}), & B_{23} &= B_{13}, \\ B_{23} &= B_{32} = -B\delta_{23}, & B_{33} &= B(\nu_1 - \delta_{33}), & \nu_1 &= 1/2(1 - \nu). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Для сжимаемого материала как в упругой, так и в пластической зоне коэффициенты имеют вид [25.8]

$$\begin{aligned} B_{11} &= h \left(\frac{4}{3} E_c f_1 - E^* \alpha_1^2 R^* \right), & B_{22} &= h \left(\frac{4}{3} E_c f_1 - E^* \alpha_2^2 R^* \right), \\ B_{12} &= B_{21} = h \left(\frac{4}{6} E_c f_2 - E^* \alpha_1 \alpha_2 R^* \right), & B_{13} &= B_{31} = h E^* \alpha_1 \sigma_3 R^*, \\ B_{23} &= B_{32} = h E^* \alpha_2 \sigma_3 R^*, & B_{33} &= h \left(\frac{1}{3} E_c - E^* \sigma_3^2 R^* \right), \end{aligned} \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sigma_1 - B(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \alpha_2 = \sigma_2 - B(\sigma_1 + \sigma_2), \quad E^* = \frac{E_c - E_K}{\sigma_i^2}, \\ R^* &= \frac{1}{1 - R'}, \quad R' = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{9\sigma_i^2 K} \frac{E_c - E_K}{1 + 4\omega}, \quad B = \frac{2E_c}{4E_c + 9K}, \\ K &= \frac{E}{3(1 - 2\nu_+)}, \quad f_1 = \frac{1 + \omega}{1 + 4\omega}, \quad f_2 = \frac{1 - 2\omega}{1 + 4\omega}, \\ \omega &= \frac{E_c}{9K}, \quad E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad E_K = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

В упругой зоне

$$E_c = \frac{3}{2} \frac{E}{1 + \nu}, \quad \frac{E_K}{E_c} = 1. \quad (2.37)$$

Для несжимаемого материала $K = \infty$.

Интегрируя напряжения по толщине оболочки, получаем вариации удельных усилий и моментов:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\gamma, & M_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}\tau, \\ T_2 &= B_{21}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + B_{23}\gamma, & M_2 &= D_{21}\chi_1 + D_{22}\chi_2 + D_{23}\tau, \\ T_3 &= B_{31}\varepsilon_1 + B_{32}\varepsilon_2 + B_{33}\gamma, & M_3 &= D_{31}\chi_1 + D_{32}\chi_2 + D_{33}\tau, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{h^2}{12} B_{11} = D(1 - \delta_{11}), \quad D_{12} = D_{21} = \frac{h^2}{12} B_{12} = D(\nu - \delta_{12}), \\ D_{13} &= 2D_{31} = \frac{h^2}{6} B_{13} = -2D\delta_{13}, \quad D_{22} = \frac{h^2}{12} B_{22} = D(1 - \delta_{22}), \\ D_{23} &= 2D_{32} = \frac{h^2}{6} B_{23} = -2D\delta_{23}, \quad D_{33} = \frac{h^2}{6} B_{33} = 2D(\nu_1 - \delta_{33}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Разрешая (2.38) относительно деформаций, найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + A_{13}T_3, & \varepsilon_2 &= A_{21}T_1 + A_{22}T_2 + A_{23}T_3, \\ \gamma &= A_{31}T_1 + A_{32}T_2 + A_{33}T_3, \end{aligned} \quad (2.40)$$

здесь

$$\begin{aligned} A_{11}\Delta &= B_{22}B_{33} - B_{23}^2, \quad (A_{12} = A_{21})\Delta = B_{32}B_{13} - B_{12}B_{33}, \\ (A_{13} = A_{31})\Delta &= B_{12}B_{23} - B_{22}B_{13}, \quad A_{22}\Delta = B_{11}B_{33} - B_{13}^2, \\ (A_{23} = A_{32})\Delta &= B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}, \quad A_{33}\Delta = B_{11}B_{22} - B_{12}^2, \\ \Delta &= B_{33}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) + 2B_{12}B_{23}B_{13} - B_{22}B_{13}^2 - B_{11}B_{23}^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Полученные соотношения следует подставить в уравнения устойчивости. Возьмем, например, упрощенную систему уравнений (2.11) гл. V, которая в этом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} \nabla_2^4 \omega - k_2 F_{xx} - F_{yy} [k_1 - \{k_2 A_{11} (T_2^0 - T_1^0)\}] - T_1^0 \omega_{xx} - \\ - T_2^0 (\omega_{yy} + \{k_2^2 \omega\}) - 2T_3^0 \left(\omega_{xy} + \left\{ k_2^2 \int \omega_x dx \right\} \right) = 0, \\ \nabla_1^4 F + k_1 \omega_{yy} + k_2 \omega_{xx} = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

здесь

$$\begin{aligned} \nabla_1^4 F &= A_{11} F_{yyyy} + A_{33} F_{yyxx} + A_{22} F_{xxxx} + A_4 F_{xyyy} + A_5 F_{yxxx}, \\ \nabla_2^4 \omega &= D_{11} \omega_{xxxx} + D_3 \omega_{xxyy} + D_{22} \omega_{yyyy} + D_4 \omega_{yxxx} + \\ &+ D_5 \omega_{xyyy} + \{k_2^2 D_{22} (2\omega_{yy} + k_2^2 \omega)\}, \\ A_3 &= A_{33} + 2A_{12}, \quad A_4 = -2A_{13}, \quad A_5 = -2A_{23}, \\ D_3 &= 2(D_{33} + D_{12}), \quad D_4 = 2D_{13}, \quad D_5 = 2D_{23}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

В случае раздельного действия касательных и нормальных напряжений в оболочке

$$\begin{aligned} \delta_{j3} = \delta_{3j} = B_{j3} = B_{3j} = D_{j3} = D_{3j} = A_{j3} = A_{3j} = \\ = A_4 = A_5 = D_4 = D_5 = 0, \\ B_{11} = B(1 - \delta_{11}), \quad B_{22} = B(1 - \delta_{22}), \\ B_{12} = B(\nu - \delta_{12}), \quad B_{33} = B(\nu_1 - \delta_{33}), \\ \Delta = B_{33}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) = B_{33}B_1^{-1}, \\ B_1 = (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)^{-1} = B^{-2}\Delta_1^{-1}, \\ \Delta_1 = (1 - \delta_{11})(1 - \delta_{22}) - (\nu - \delta_{12})^2, \quad A_{33} = B_{33}^{-1} = B^{-1}(\nu_1 - \delta_{33})^{-1}, \\ A_{22} = B^{-1}\Delta_1^{-1}(1 - \delta_{22}) = B_{11}B_1, \quad A_{11} = B^{-1}\Delta_1^{-1}(1 - \delta_{11}) = B_{22}B_1, \\ A_{12} = A_{21} = B_{12}B_1 = B^{-1}\Delta_1^{-1}(\nu - \delta_{12}), \\ A_3 = B^{-1}[(\nu_1 - \delta_{33})^{-1} + 2\Delta_1^{-1}(\nu - \delta_{12})], \\ D_3 = 2D(1 - \delta_{33} - \delta_{12}), \quad D_{11} = D(1 - \delta_{11}), \quad D_{22} = D(1 - \delta_{22}), \\ \nabla_1^4 F = A_{11} F_{yyyy} + A_{33} F_{xxyy} + A_{22} F_{xxxx}, \\ \nabla_2^4 \omega = D_{11} \omega_{xxxx} + D_3 \omega_{xxyy} + D_{22} \omega_{yyyy} + \{k_2^2 D_{22} (2\omega_{yy} + k_2^2 \omega)\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Уравнения устойчивости (2.42) в этом случае значительно упрощаются:

$$\begin{aligned}
 D \{ & (1 - \delta_{11}) w_{xxxx} + 2(1 - \delta_{33} - \delta_{12}) w_{xyyy} + \\
 & + (1 - \delta_{22}) (w_{yyyy} + k_2^2 \{ 2w_{yy} + k_2^2 w \}) \} - k_2 F_{xx} - \\
 & - F_{yy} \left[k_1 - \left\{ k_2 \frac{1 - \delta_{11}}{B \Delta_1} (T_2^0 - T_1^0) \right\} \right] - T_1^0 w_{xx} - \\
 & - T_2^0 (w_{yy} + \{ k_2^2 w \}) - 2T_3^0 (w_{xy} + \{ k_2^2 \int w_x dy \}) = 0, \\
 (1 - \delta_{11}) F_{yyyy} + [& \Delta_1 (v_1 - \delta_{33})^{-1} + 2(v - \delta_{12})] F_{xyyy} + \\
 & + (1 - \delta_{22}) F_{xxxx} + B \Delta_1 (k_1 w_{yy} + k_2 w_{xx}) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

В упругой области ($\delta_{n,k} = 0$, $\Delta_1 = 1 - v^2$) уравнения (2.45) сводятся к уравнениям (2.11) гл. V.

В случае использования теории течения коэффициенты в (2.38) имеют [25.1] вид

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= A \{ 2(1 + v) + l^0 [v_2 (2\sigma_2^* - \sigma_1^*)^2 + 9\sigma_3^{*2}] \}, \\
 B_{12} &= B_{21} = A \{ 2v(1 + v) - l^0 [v_2 (2\sigma_1^* - \sigma_2^*) (2\sigma_2^* - \sigma_1^*) - 9v\sigma_3^{*2}] \}, \\
 B_{13} &= B_{31} = -\frac{3}{2} A l^0 \sigma_3^* [(2 - v) \sigma_1^* - (1 - 2v) \sigma_2^*], \\
 B_{22} &= A \{ 2(1 + v) + l^0 [v_2 (2\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 + 9\sigma_3^{*2}] \}, \\
 B_{23} &= B_{32} = -\frac{3}{2} A l^0 \sigma_3^* [(2 - v) \sigma_2^* - (1 - 2v) \sigma_1^*], \\
 B_{33} &= A \left\{ (1 - v^2) + \frac{1}{4} l^0 [(5 - 4v) (\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2}) - 2(4 - 5v) \sigma_1^* \sigma_2^*] \right\},
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

где

$$l^0 = \frac{E}{E_k^0} - 1,$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{Eh}{1 + v} \left\{ 2(1 - v^2) + \frac{1}{2} l^0 [(5 - 4v) (\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2}) - \right. \\
 & \left. - 2(4 - 5v) \sigma_1^* \sigma_2^* + 18(1 - v) \sigma_3^{*2}] \right\}^{-1}, \quad v_2 = \frac{1 + v}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Г л а в а XXVI

КРУГОВАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА

§ 1. Уравнения

В случае круговой цилиндрической оболочки в полученных уравнениях следует положить $k_1 = 0$, $k_2 = R^{-1}$. Исключая из системы (2.42) гл. XXV функцию усилий с помощью обратного оператора

$$F = -k_2 \nabla_1^{-4} w_{xx}, \tag{1.1}$$

сводим ее к одному уравнению

$$\nabla_2^4 w + k_2^2 \nabla_1^{-4} w_{xxxx} + \left\{ k_2^2 A_{11} (T_1^0 - T_2^0) \iint w_{xx} dy dy \right\} - \\ - T_1^0 w_{xx} - T_2^0 (w_{yy} + \{k_2^2 w\}) - 2T_3^0 (w_{xy} + \{k_2^2 \int w_x dy\}) = 0. \quad (1.2)$$

При этом в первом слагаемом, заключенном в фигурные скобки, в операторе ∇_1^{-4} оставлен только главный член. Малые члены опущены. Положив

$$w = C \cos(\lambda k_2 x + k_2 n y) \quad (\lambda = m\pi R/L), \quad (1.3)$$

получим из (1.2) характеристическое уравнение

$$k_2^2 [D_{11} \lambda^4 + D_3 \lambda^2 n^2 + D_{22} (n^2 - \{1\})^2 + D_4 \lambda^3 n + D_5 \lambda n^3] + \\ + \lambda^4 (A_{11} n^4 + A_3 \lambda^2 n^2 + A_{22} \lambda^4 + A_4 \lambda n^3 + A_5 \lambda^3 n)^{-1} + \\ + T_1^0 \lambda^2 (1 + \{n^{-2}\}) + T_2^0 (n^2 - (1 + \lambda^2 n^{-2})) + \\ + 2T_3^0 \lambda n (1 - \{n^{-2}\}) = 0. \quad (1.4)$$

Для оболочки средней длины такое уравнение получено в работе [26.5]. Из уравнения (1.4) можно получить формулы критических усилий для различных случаев нагружения. Коэффициенты D_4, D_5, A_4, A_5 в уравнении (1.4) не равны нулю только при совместном действии сдвигающих усилий T_3^0 и нормальных усилий T_1^0, T_2^0 . В дальнейшем этот случай рассматриваться не будет. При этом уравнение (1.4) упрощается. Для оболочек средней длины в нем можно опустить еще и члены в фигурных скобках. В итоге получаем

$$k_2^2 (D_{11} \lambda^4 + D_3 \lambda^2 n^2 + D_{22} n^4) + \lambda^4 (A_{11} n^4 + A_3 \lambda^2 n^2 + A_{22} \lambda^4)^{-1} + \\ + T_1^0 \lambda^2 + T_2^0 n^2 + 2T_3^0 \lambda n = 0. \quad (1.5)$$

Для длинных оболочек можно считать $\lambda^2 \ll n^2$. В этом случае уравнение (1.4) имеет вид

$$k_2^2 D_{22} (n^2 - 1)^2 + \lambda^4 (A_{11} n^4)^{-1} + T_1^0 \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \\ + T_2^0 \left(n^2 - 1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) + 2T_3^0 \lambda n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5), (1.6) в дальнейшем будем использовать для получения формул критических усилий в различных частных случаях нагружения.

§ 2. Осевое сжатие

Оболочки средней длины. Полагая $T_1^0 = -N$, $T_2^0 = T_3^0 = 0$ и опуская члены в фигурных скобках, получаем из характеристического уравнения зависимость усилия сжатия от параметров волнообразования

$$N = k_2^2 \left(D_{11} \lambda^2 + D_3 n^2 + D_{22} \frac{n^4}{\lambda^2} \right) - \frac{\lambda^2}{A_{11} n^4 + A_3 \lambda^2 n^2 + A_{22} \lambda^4}. \quad (2.1)$$

При осесимметричной форме потери устойчивости ($n=0$)

$$N = k_2^2 D_{11} \lambda^2 + \frac{1}{A_{22} \lambda^2}. \quad (2.2)$$

Минимизируя N по λ^2 , находим

$$\lambda^2 = (k_2^2 A_{22} D_{11})^{-1/2}, \quad (2.3)$$

$$N = N_0 = 2 \left(k_2^2 \frac{D_{11}}{A_{22}} \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

При неосесимметричной форме потери устойчивости зависимость (2.1) перепишем в виде

$$N = \frac{1}{A\eta} \left(k_2^2 D_{22} n^2 \Phi_1 + \frac{\eta^2}{A_{22} n^2 \Phi_2} \right), \quad (2.5)$$

где

$$\eta = \frac{\lambda^2}{A n^2}, \quad \Phi_1 = \gamma \eta^2 + \beta \sqrt{\gamma} \eta + 1, \quad \Phi_2 = \eta^2 + \alpha \eta + 1, \quad (2.6)$$

$$A^2 = \frac{A_{11}}{A_{22}}, \quad \alpha = \frac{A_3}{\sqrt{A_{11} A_{22}}}, \quad \beta = \frac{D_3}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}, \quad \gamma = \frac{A_{11} D_{11}}{A_{22} D_{22}}.$$

Из условия минимума $\partial N / \partial n^2 = 0$ находим

$$n^2 = \frac{\eta}{(k_2^2 D_{22} A_{22} \Phi_1 \Phi_2)^{1/2}}. \quad (2.7)$$

Подставив (2.6) в (2.4), получим

$$N = N_0 \Phi_3, \quad \Phi_3 = \left(\frac{\Phi_1}{\gamma \Phi_2} \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Условие минимума $\partial N / \partial \eta = 0$ приводит к уравнению

$$\eta^2 (\gamma \alpha - \beta \sqrt{\gamma}) + 2\eta (\gamma - 1) + \beta \sqrt{\gamma} - \alpha = 0. \quad (2.9)$$

Его решение имеет вид

$$\eta = \frac{1 - \gamma}{\gamma \alpha - \beta \sqrt{\gamma}} + \left[\left(\frac{1 - \gamma}{\gamma \alpha - \beta \sqrt{\gamma}} \right)^2 + \frac{\alpha - \beta \sqrt{\gamma}}{\gamma \alpha - \beta \sqrt{\gamma}} \right]^{1/2}. \quad (2.10)$$

Знак минус перед корнем в (2.10) отброшен из следующих соображений. Нас интересуют только положительные корни

уравнения (2.9). По теореме Декарта число положительных корней уравнения равно или на четное число меньше числа переменных знаков в ряду коэффициентов уравнения. Следовательно, положительные корни существуют при условиях:

$$\begin{aligned} \gamma &= 1, & \beta < \alpha, & \beta > \alpha, \\ \gamma > 1, & \beta \sqrt{\gamma} < \alpha, & \beta \sqrt{\gamma} > \gamma \alpha, \\ \gamma < 1, & \beta \sqrt{\gamma} < \alpha \gamma, & \beta \sqrt{\gamma} > \alpha, \end{aligned} \quad (2.11)$$

согласно которым и отброшен знак минус. Таким образом, для критического усилия сжатия получено два выражения (2.4), (2.8), соответствующие осесимметричной и неосесимметричной формам потери устойчивости. Неосесимметричная форма реализуется при

$$\Phi_3 \leq 1, \quad (2.12)$$

т. е. при

$$\Phi_1 \leq \gamma \Phi_2, \quad \text{или} \quad \gamma \geq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2. \quad (2.13)$$

Если считать материал несжимаемым, то согласно (2.30) гл. XXV:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= E_p, \quad B_{11} = B(1 - E_p), \quad B_{12} = B_{21} = \nu B, \\ B_{22} &= B, \quad A_{11} = [B(1 - \nu^2 - E_p)]^{-1}, \quad A_{12} = A_{21} = -\nu A_{11}, \\ A_{22} &= \frac{1 - E_p}{B(1 - \nu^2 - E_p)}, \quad A_3 = \frac{2}{B} \left(\frac{1}{1 - \nu} - \frac{\nu}{1 - \nu^2 - E_p} \right), \\ \beta &= \frac{2}{\sqrt{1 - E_p}}, \\ D_{11} &= D(1 - E_p), \quad D_{22} = D, \quad D_3 = 2D, \quad \alpha = 2(1 - 2E_p), \\ \gamma &= 1 - E_p. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Неравенство (2.12) не выполняется, следовательно, неосесимметричная форма потери устойчивости невозможна. Оболочка теряет устойчивость по осесимметричной форме. Согласно (2.4) для этого случая

$$N = \sqrt{\frac{E_c E_k}{3(1 - \nu^2)}} \frac{h^2}{R}. \quad (2.15)$$

Эта формула может быть выведена из результатов Бижляра [25.10]. В упругой области ($E_c = E_k = E$) формула (2.15) сводится к формуле Лоренца — Тимошенко.

В случае сжимаемого материала Э. И. Григолюк получил формулу

$$N = k \frac{E h^2}{R}, \quad (2.16)$$

где по деформационной теории [25.2]:

$$k = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{E_k E_c}}{E} \frac{1}{\left[3 + 2 \frac{1-2\nu}{E} E_c - \frac{(1-2\nu)^2}{E^2} E_k E_c \right]^{1/2}}, \quad (2.17)$$

по теории течения [26.4]:

$$k = \frac{1}{\left\{ 3 \left[\left(\frac{5}{4} - \nu \right) \frac{E}{E_k} - \left(\frac{1}{2} - \nu \right)^2 \right] \right\}^{1/2}}. \quad (2.18)$$

При $\nu = 0,5$ из (2.17) следует формула (2.15), а из (2.18) формула

$$N = \sqrt{\frac{E_k E}{3(1-\nu^2)}} \frac{h^2}{R}. \quad (2.19)$$

Длина полуволны согласно (2.3) равна

$$l = \frac{L}{m} = \pi \left[\frac{E_c}{E_k} \frac{h^2 R^2}{12(1-\nu^2)} (1 - E_p)^2 \right]^{1/4}. \quad (2.20)$$

Зависимости k согласно (2.17), (2.18) показаны на рис. 26.1, 26.2 соответственно.

Длинные оболочки. Из характеристического уравнения (1.6) гл. XXV в этом случае получаем

$$N = \frac{k_2^2 D_{22} n^2 (n^2 - 1)^2}{\lambda^2 (n^2 + 1)} + \frac{\lambda^2}{n^2 (n^2 + 1) A_{11}}. \quad (2.21)$$

Если $n = 1$, то оболочка теряет устойчивость при

$$N = \frac{\lambda_1^2}{2A_{11}}, \quad \lambda_1 = \frac{\pi R}{L}. \quad (2.22)$$

Положив

$$\mu = \omega_1^2 (n^2 - 1) n^2, \quad \omega_1 = \frac{1}{\lambda} (k_2^2 A_{11} D_{22})^{1/4}, \quad (2.23)$$

из выражения (2.21) получаем

$$q'_1 = \frac{1 + \mu^2}{2\mu} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad (2.24)$$

где

$$q'_1 = \frac{N}{N'_0}, \quad N'_0 = 2 \left(\frac{k_2^2 D_{22}}{A_{11}} \right)^{1/2}. \quad (2.25)$$

Выражение (2.24) имеем минимум при $\mu = 1$

$$q'_1 = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad (2.26)$$

или

$$N = 2 \left(\frac{k_2^2 D_{22}}{A_{11}} \right)^{1/2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}. \quad (2.27)$$

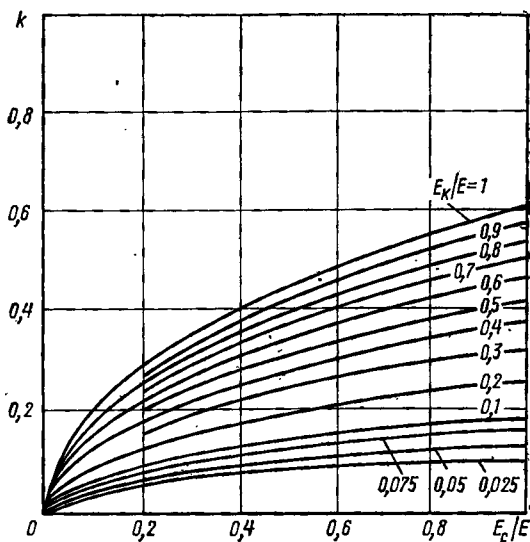


Рис. 26.1 Относительное критическое усилие по деформационной теории.

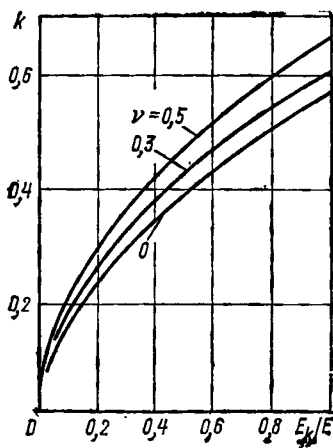


Рис. 26.2 Относительное критическое усилие сжатия по теории течения.

При $n = 2$ усилие N будет наименьшим:

$$N = \frac{3}{5} N'_0 = \frac{6}{5} \left(\frac{k_2^2 D_{22}}{A_{11}} \right)^{1/2}. \quad (2.28)$$

Для упругой оболочки из формулы (2.28) следует формула Саутуэлла — Тимошенко. Для оболочки из несжимаемого материала по деформационной теории

$$N = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{E_\sigma E_\kappa}{3(1-\nu^2)}} \frac{h^2}{R}. \quad (2.29)$$

Эксперименты. На рис. 26.3 показаны значения нижних критических напряжений по теории течения (кривая 1), по теории малых упруго-пластических деформаций (кривая 2), по теории локальных деформаций (кривая 3) и значение верхнего критического напряжения (кривая 4) по теории локальных деформаций. Треугольниками показаны опытные данные.

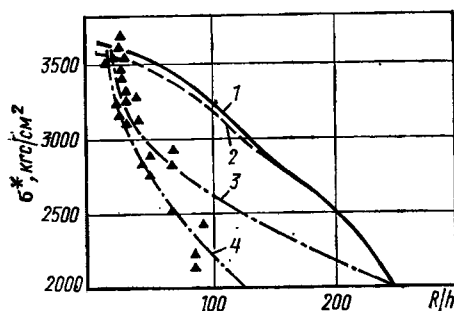


Рис. 26.3. Экспериментальные и расчетные значения критических напряжений сжатия.

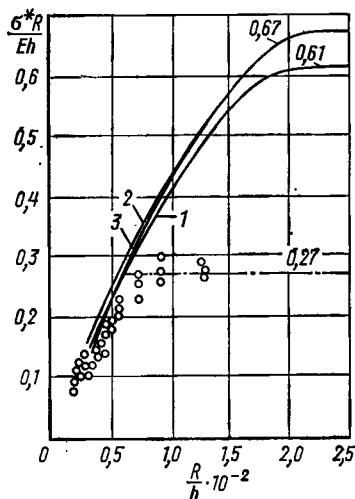


Рис. 26.4. Экспериментальные и расчетные значения относительных критических напряжений сжатия.

На рис. 26.4 кружками показаны результаты экспериментов А. Н. Божинского и А. С. Вольмира [26.1] (1961), проведенных на 30 точеных дюралюминиевых оболочках ($L/R = 2$, $R/h = 25 \div 135$). Кривая 1 построена по теории деформаций ($\nu = 0,32$), кривая 2 — по теории деформаций ($\nu = 0,5$), кривая 3 — по теории течения. Оболочки при $R/h < 80$ теряли устойчивость за пределом упругости. При $R/h < 35$ наблюдалась осесимметричная, а при $R/h > 35$ неосесимметричная форма потери устойчивости. Видно, что с ростом пластических деформаций

(уменьшение R/h) различие экспериментальных и расчетных данных уменьшается. Таким образом, линейная теория устойчивости в пластической области дает удовлетворительное приближение к эксперименту.

Ли [26.15] (1962) испытал десять оболочек из алюминиевого сплава ($L/R = 4,04 \div 10,5$; $R/h = 9,36 \div 46,06$; $\nu = 0,32$).

Оболочки теряли устойчивость по осесимметричной или близкой к осесимметричной форме. Результаты этих испытаний также неплохо подтверждают деформационную теорию. Теория течения дает завышенные результаты. При неосесимметричной форме имеется значительное расхождение данных, что, по-видимому, следует отнести за счет влияния начальных неправильностей.

В заключение приведем эмпирическую формулу

$$N = \frac{0,6 - 10^{-7} (R/h)^2}{1 + 0,004 E/\sigma_s} \frac{E h^2}{R}, \quad (2.30)$$

полученную Доннеллом [7.23] (1934). Проверка этой формулы опытами имеется в работах [26.14, 26.19].

§ 3. Внешнее давление

Оболочки средней длины. Положив $T_1^0 = T_3^0 = 0$, $T_2^0 = -qR$, из характеристического уравнения (1.5) получим

$$qR = \frac{1}{\mu} \left(\lambda^2 \frac{D_{11} + D_3\mu + D_{22}\mu^2}{R^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{A_{22} + A_3\mu + A_{11}\mu^2} \right), \quad (3.1)$$

где

$$\mu = n^2/\lambda^2, \quad (3.2)$$

q — внешнее давление.

Функция (3.1) имеет минимум при $\lambda = \pi R/L$, $m = 1$. Вводя обозначения

$$q_2 = \frac{qR}{N_0}, \quad N_0 = 2 \left(\frac{k_2^2 D_{11}}{A_{11}} \right)^{1/2}, \quad y = \mu \left(\frac{A_{11}}{A_{22}} \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$\Psi^2 = \frac{\lambda^2}{2} (k_2^2 D_{11} A_{22})^{1/2},$$

из (3.1) получаем

$$q_2 = \left(\frac{A_{11}}{A_{22}} \right)^{1/2} \frac{1}{y} \left[\frac{\Psi^2 (y^2 + \beta \sqrt{y} y + \gamma)}{\gamma} + \frac{1}{4\Psi^2 (y^2 + \alpha_y + 1)} \right]. \quad (3.4)$$

Здесь параметр окружных волн y следует подобрать из условия минимума q_2 . Обычно $n \geq 4$, так что y можно считать большим. Принимая

$$\beta \sqrt{y} y + \gamma \ll y^2, \quad \alpha_y + 1 \ll y^2, \quad (3.5)$$

получаем

$$q_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{A_{11}}{A_{22}} \right)^{1/2} \left(\frac{2\Psi^2}{\gamma} + \frac{1}{2\Psi^2} \frac{1}{y^3} \right). \quad (3.6)$$

Из условия $\partial q_2 / \partial y = 0$ находим

$$y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{\gamma}}{\Psi^2} = \sqrt{3} \chi_1^2. \quad (3.7)$$

При этом

$$q_2 = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \frac{1}{\sqrt{\gamma} \chi}, \quad (3.8)$$

где

$$\chi_1 = A\chi, \quad A^2 = \frac{A_{11}}{A_{22}}, \quad \gamma = \frac{A_{11}D_{11}}{A_{22}D_{22}}, \quad \chi = \frac{L}{\pi R} \frac{1}{\sqrt[4]{k_2^2 A_{11} D_{22}}}. \quad (3.9)$$

Количество волн по окружности согласно (3.7) равно

$$n^2 = \sqrt{3} / \omega, \quad (3.10)$$

где

$$\omega = \frac{L}{\pi R} \sqrt[4]{k_2^2 A_{11} D_{22}}. \quad (3.11)$$

В случае несжимаемого материала по деформационной теории из (3.8) имеем величину критического давления

$$q = \frac{0,855}{(1 - \nu^2)^{3/4}} E_c \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \sqrt[4]{\frac{E_K}{E_c} \left(1 + 3 \frac{E_K}{E_c} \right)^2 \frac{1}{16}}. \quad (3.12)$$

Эта формула приведена Джераром [26.11]. При $E_K = E_c = E$ из нее следует формула Саутуэлла — Папковича.

В случае упруго сжимаемого материала Э. И. Григолюк получил формулу

$$q = kE \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}, \quad (3.13)$$

где по деформационной теории [25.2]:

$$k = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt[4]{E_K E_c^3}}{E} \frac{\sqrt{1 + 3E_K/E_c}}{\left[3 + 2 \frac{1 - 2\nu}{E} E_c - \frac{(1 - 2\nu)^2}{E^2} E_K E_c \right]^{3/4}}, \quad (3.14)$$

по теории течения [26.4]:

$$k = \frac{\pi}{3\sqrt{6}} \frac{(3 + E/E_K)^{1/2}}{\left[\left(\frac{5}{4} - \nu \right) \frac{E}{E_K} - \left(\frac{1}{2} - \nu \right)^2 \right]^{3/4}}. \quad (3.15)$$

При $\nu = 1/2$ из последней формулы имеем

$$k = \frac{2\pi}{3^{9/4}} \left(3 + \frac{E}{E_K} \right)^{1/2} \left(\frac{E}{E_K} \right)^{3/4}. \quad (3.16)$$

Зависимость коэффициента k от E_c/E , E_k/E согласно формуле (3.14) показана на рис. 26.5 (коэффициент Пуассона

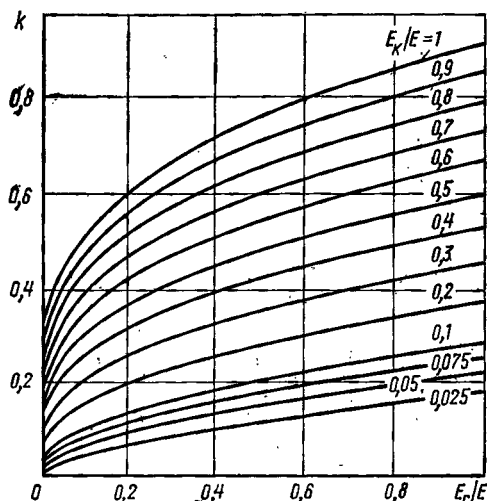


Рис. 26.5. Относительное критическое внешнее давление по деформационной теории.

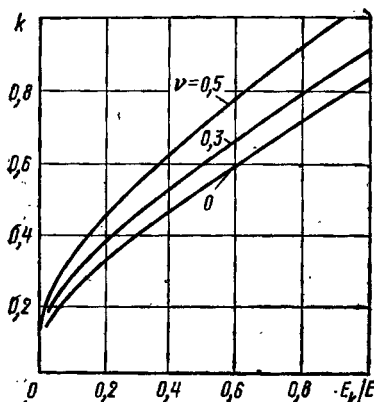


Рис. 26.6. Относительное критическое внешнее давление по теории течения.

$\nu = 0.3$). Зависимость k от E_k/E и ν по теории течения показана на рис. 26.6.

Длинные оболочки. Для длинных оболочек из характеристического уравнения (1.6) имеем

$$qR = \frac{k_2^2 D_{22} p^2 (n^2 - 1)^2 + \lambda^4 / A_{11} n^2}{n^2 (n^2 - 1) - \lambda^2}. \quad (3.17)$$

Здесь также следует положить $m = 1$.

При $n = 1$ оболочка теряет устойчивость как длинная труба с сохранением формы поперечного сечения. Критическое давление равно

$$q = -\frac{\lambda^2}{A_{11}R}. \quad (3.18)$$

Это означает, что от действия внешнего давления оболочка не теряет устойчивости, внутреннее давление вызывает потерю устойчивости.

При $n > 1$ зависимость (3.17) перепишем в виде

$$q_3 = n^2 - 1 + \frac{1}{\omega^4 n^4 (n^2 - 1)}, \quad (3.19)$$

где

$$q_3 = 3 \frac{q}{q_0}, \quad q_0 = \frac{3D_{22}}{R^3}, \quad (3.20)$$

а ω определяется согласно (3.11). Для бесконечно длинных оболочек $\omega = \infty$. В этом случае при $n = 2$

$$q_3 = 3, \quad q = q_0. \quad (3.21)$$

В случае упругой оболочки из (3.21) следует формула Грасгофа — Бресса. Для упруго сжимаемого материала по деформационной теории [26.6]

$$q = k \frac{Eh^3}{R^3}, \quad (3.22)$$

где

$$k = \frac{E_c/E}{1 + 3 \frac{E_c}{E_k} - \left(1 - \frac{1-2\nu}{E} E_c\right)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{(1-2\nu)^2}{E^2} E_c E_k \times \right. \\ \left. \times \frac{\left(1 - \frac{E_c}{E_k}\right) \left[6 - 3 \frac{E_c}{E_k} + \frac{(1-2\nu)^2}{E^2} E_c^2\right]}{\left[1 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1-2\nu}{E} E_c\right)^2\right] \left[3 + \frac{(1-2\nu)^2}{E^2} E_c^2\right]} \right\}. \quad (3.23)$$

Для несжимаемого материала

$$k = \frac{1}{3} \frac{E_k}{E}. \quad (3.24)$$

Для оболочек конечной длины число окружных волн в (3.19) следует задавать дискретно. Поскольку формула (3.19) совпадает с точностью до значений ω , D_{22} с аналогичной формулой для упругой оболочки, то для выбора значений n в зависимости от ω можно использовать полученные в гл. VIII результаты.

§ 4. Кручение

Оболочки средней длины. Зададим функцию прогиба в виде

$$w = C [\sin k_2 (\lambda_m x - ny) - \sin k_2 (\lambda_{m+2} x - ny)], \quad (4.1)$$

где

$$\lambda_m = \frac{m\pi R}{L}, \quad \lambda_{m+2} = \frac{(m+2)\pi R}{L}. \quad (4.2)$$

Подставив (4.1) в уравнение (1.2) и приравняв нулю слагаемые при одинаковых синусах, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} T_3^0 = \frac{1}{2\lambda_m n} & \left[k_2^2 (D_{22} n^4 + D_3 \lambda_m^2 n^2 + D_{11} \lambda_m^4) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_m^4}{A_{11} n^4 + A_3 \lambda_m^2 n^2 + A_{22} \lambda_m^4} \right], \\ T_3^0 = \frac{1}{2\lambda_{m+2} n} & \left[k_2^2 (D_{22} n^4 + D_3 \lambda_{m+2}^2 n^2 + D_{11} \lambda_{m+2}^4) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_{m+2}^4}{A_{11} n^4 + A_3 \lambda_{m+2}^2 n^2 + A_{22} \lambda_{m+2}^4} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Величины λ_m^2 , λ_{m+2}^2 при потере устойчивости от кручения малы в сравнении с n^2 , поэтому в квадратных скобках уравнений (4.3) можно оставить только члены с четвертыми степенями n . Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &= k_3^4 n^2 k_2^2 A_{11} D_{22}, \quad 2\lambda_1 \beta = \lambda_m, \quad \chi = \beta(1 + \beta), \\ k_3 &= 1/2\lambda_1, \quad \lambda_1 = \pi R/L, \end{aligned} \quad (4.4)$$

из условия совместности уравнений (4.3) получаем уравнение

$$3\chi^2 + \chi - \alpha = 0. \quad (4.5)$$

Его решение имеет вид

$$\chi = \frac{1}{6} (\sqrt{1 + 12\alpha} - 1), \quad (4.6)$$

а следовательно,

$$\beta = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 4\chi} - 1). \quad (4.7)$$

Из первого уравнения системы (4.3) находим

$$2T_3^0 = \frac{\alpha + \beta^4}{A_{11} n^5 k_3^3 \beta}. \quad (4.8)$$

Величину n здесь следует определить из условия минимума T_3^0 . Поступая так же, как и в случае упругой оболочки (гл. IX),

получаем

$$\alpha \approx 5,26, \quad \beta = 0,68, \quad n^2 = 2\lambda_1 \left(\frac{5}{k_2^2 A_{11} D_{22}} \right)^{1/4}. \quad (4.9)$$

При этом

$$T_3^0 = 1,981 \left(\frac{k_3^{10} D_{22}^5 \lambda_1^4}{A_{11}^3} \right)^{1/8}. \quad (4.10)$$

В случае несжимаемого материала по деформационной теории

$$T_3^0 = 0,740 E_c \left(\frac{h}{R} \right)^{5/4} \left(\frac{R}{L} \right)^{1/2} (1 - \nu^2)^{3/8}. \quad (4.11)$$

Эта формула с коэффициентом 0,701 была получена Джера-ром [26.12]. При $E_c = E$ формула сводится к формуле (1.24) гл. IX для упругой оболочки.

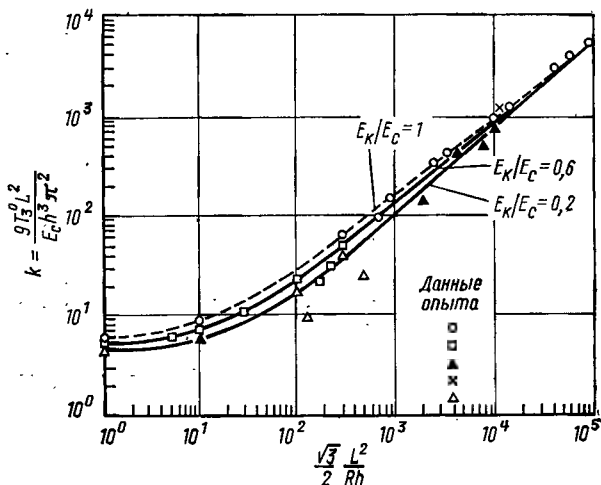


Рис. 26.7 Экспериментальные и расчетные значения относительного критического усилия сдвига

В работе Радхакришнана [26.18] получено решение задачи методом Бубнова. Функция прогиба задавалась рядом

$$w = \sin \frac{\pi y}{R} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \lambda_m k_2 x + \cos \frac{\pi y}{R} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \lambda_m k_2 x. \quad (4.12)$$

Результаты расчетов показаны на рис. 26.7, где

$$k = 9T_3^0 L^2 / E_c h^3 \pi^2.$$

Длинные оболочки. Критические усилия для длинных оболочек получим из характеристического уравнения (1.6)

$$2T_3^0 = (k_2^2 D_{22} A_{11})^{3/4} \frac{1}{A_{11}} \left[\omega (n^2 - 1) n + \frac{1}{\omega^3 n^3 (n^2 - 1)} \right]. \quad (4.13)$$

Из условия минимума по ω находим

$$\omega^4 = \frac{3}{n^4 (n^2 - 1)^2}. \quad (4.14)$$

При этом

$$T_3^0 = 2 \left[\frac{(n^2 - 1)^2 (k_2^2 D_{22})^3}{27 A_{11}} \right]^{1/4}. \quad (4.15)$$

критическое значение усилия соответствует $n = 2$ (т. е. двум полуволнам):

$$T_3^0 = 2 \left[\frac{(k_2^2 D_{22})^3}{3 A_{11}} \right]^{1/4}. \quad (4.16)$$

Для случая несжимаемого материала по деформационной теории

$$T_3^0 = \frac{E_c h}{3\sqrt{2}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} (1 - \nu^2)^{-3/4}. \quad (4.17)$$

Для упругой оболочки отсюда следует формула Шверина. Для упруго сжимаемого материала Э. И. Григолюк получил формулу

$$T_3^0 = k E h \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2}, \quad (4.18)$$

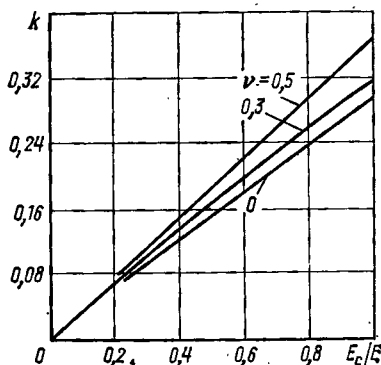


Рис. 26.8. Относительное критическое усилие сдвига длинной оболочки по деформационной теории

по теории малых упруго-пластических деформаций имеем [26.5]

$$k = \frac{4}{3^{3/2}} \frac{E_c/E}{[3 - (1 - 2\nu) E_c/E]^{3/4} [1 + (1 - 2\nu) E_c/E]^{3/4}}; \quad (4.19)$$

по теории течения [26.4] —

$$T_3^0 = \frac{E h}{2} \left[\frac{1}{4} \frac{\sqrt{\gamma}}{(1 + \gamma)^2 + 3\gamma (E/E_K - 1)} + \frac{1}{3(1 - \nu^2)} \frac{h^2}{R^2} \frac{1 + 2k\gamma + \gamma^2}{\gamma \sqrt{\gamma}} \right]. \quad (4.19')$$

Здесь

$$\gamma = \frac{n^2 L^2}{m^2 h^2 R^2}, \quad k = \frac{1 + \nu + \frac{3}{2}\nu\varphi}{1 + \nu + \frac{3}{2}\varphi}, \quad \varphi = \frac{E}{E_K} - 1, \quad n = 2.$$

На рис. 26.8 показаны значения k по формуле (4.19).

Влияние начальных прогибов. Нелинейная задача. Эту задачу рассматривали Ли и Эйдс [26.13] (1957) по деформационной теории на примере оболочки из несжимаемого материала,

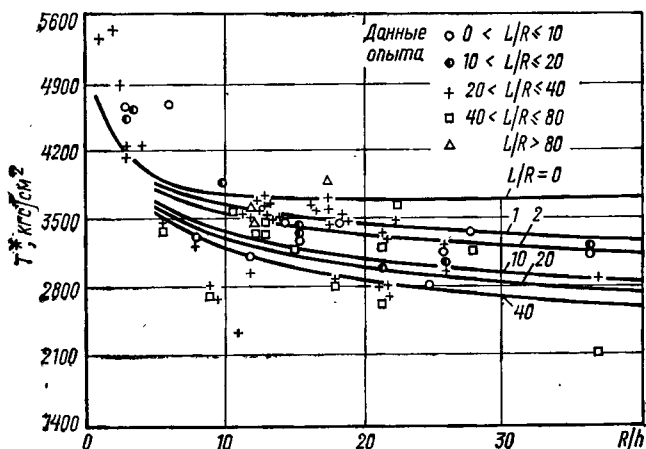


Рис. 26.9. Экспериментальные значения критического напряжения сдвига.

находящегося в чисто пластическом состоянии. Начальный прогиб и прогиб под нагрузкой задавались подобными:

$$\begin{aligned} w_0 &= (a_0/a) w = \\ &= a_0 h [\sin k_2 n (y + \gamma x) \sin k_2 \lambda_1 x + 1/2 a_1 (\cos 2\lambda_1 k_2 x - 1)]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

При решении уравнений методом Ритца — Папковича предполагалось, что секущий и касательный модули не зависят от прогиба. Значения γ и n брались из решения линейной задачи

$$\gamma = -1,732 \frac{1}{H}, \quad n = \frac{\pi R}{L} \frac{H}{0,722} \quad \left(H^4 = \frac{L^2}{Rh} \right). \quad (4.21)$$

Получена формула для критического усилия идеальной оболочки

$$T_3^0 = \eta T_3^*, \quad (4.22)$$

где

$$\eta = \left[1 - (0,06 + 0,114H - 0,006H^2) \left(1 - \frac{E_c}{E_k} \right)^{-1,5/H} \right]^{E_c/E}, \quad (4.23)$$

а T_3^* — значение критического касательного усилия для упругой оболочки. Расчеты показали, что начальные неправильности оказывают незначительное влияние на величину критического усилия.

На рис. 26.9 показано сравнение расчетных (сплошные кривые) и экспериментальных значений параметра

$$T^* = T_0^0 2R(2R + h)/[h(4R^2 + h^2)]$$

для оболочки из стали. Наблюдается хорошее соответствие.

§ 5. Внешнее давление и сжатие, растяжение

Оболочки средней длины. В этом случае из характеристического уравнения (1.5) имеем уравнение

$$q_2 = \left(\frac{A_{11}}{A_{22}}\right)^{1/2} \frac{1}{y} \left[\frac{\Psi^2(y^2 + \beta\sqrt{\gamma}y + \gamma)}{\gamma} + \frac{1}{4\Psi^2(y^2 + \alpha y + 1)} + q_1 \right], \quad (5.1)$$

которое отличается от уравнения (3.4) добавочным слагаемым $q_1 = T_0^0/N_0$ в квадратных скобках. Если ввести параметр δ , считая нагружение пропорциональным, и заменить q_2 , q_1 на δq_2 , δq_1 , то при допущениях (3.5) получим формулу

$$\delta = \frac{A}{2\sqrt{\gamma}(q_2 y - A q_1)} \left[\left(\frac{y}{\chi_1}\right)^2 + \left(\frac{\chi_1}{y}\right)^2 \right], \quad (5.2)$$

где

$$A^2 = \frac{A_{11}}{A_{22}}, \quad \chi_1 = A\chi, \quad \chi = \frac{L}{\pi R} (k_2^2 A_{11} D_{22})^{-1/4}. \quad (5.3)$$

Из условия минимума δ по y получаем уравнение

$$y^4 = \chi_1^4 \left(3 + \frac{2}{\varepsilon y - 1} \right), \quad \varepsilon = \frac{q_2}{2Aq_1}, \quad (5.4)$$

Это уравнение легко решить графически, после чего определится и δ . Если значения q_1 не намного превышают значения q_2 , то в правой части уравнения (5.4) можно пренебречь вторым слагаемым. В этом случае

$$y = \sqrt[4]{3} \chi_1, \quad (5.5)$$

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{3\gamma} (q_2 \chi \sqrt[4]{3} - q_1)}. \quad (5.6)$$

Количество волн по окружности определяется согласно (3.10), как и в случае внешнего давления.

Как частный случай из формулы (5.6) следует выражение критического гидростатического давления ($\delta = q$, $q_2 = R/N_0$, $q_1 = -R/2N_0$)

$$q = \frac{4N_0}{\sqrt{3\gamma} R (2\chi \sqrt[4]{3} + 1)}, \quad (5.7)$$

и критического бокового давления

$$q = \frac{2N_0}{\sqrt{27} \sqrt{\gamma} R\chi}. \quad (5.8)$$

Заметим, что уравнение (5.1) формально совпадает с аналогичным уравнением для конструктивно анизотропных упругих оболочек [11.7]. Поэтому формулу критического давления можно вывести и другим путем, не вводя параметр δ . Минимизируя (5.1) по y , получаем алгебраическое уравнение для нахождения y :

$$4\Psi^2 \left[\Psi^2 \left(\frac{y^2}{\gamma} - 1 \right) - q_1 \right] - \frac{3y^2 + 2\alpha y + 1}{(y^2 + \alpha y + 1)^2} = 0. \quad (5.9)$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень, который вместе с (5.1) и определяет критическое состояние оболочки. Уравнение (5.9) легко решается графически. При допущении $y \gg 1$, пренебрегая единицей и αy по сравнению с y^2 , получаем из (5.9) более простое уравнение:

$$4y^2\Psi^2 [\Psi^2 (y^2 - \gamma) - q_1\gamma] - 3\gamma = 0, \quad (5.10)$$

отсюда получаем

$$y^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\gamma}}{\Psi^2} \theta, \quad (5.11)$$

где

$$\theta = \sqrt{\gamma} (q_1 + \Psi^2) + \sqrt{3 + \gamma (q_1 + \Psi^2)^2}. \quad (5.12)$$

Подставив (5.11) в уравнение (5.1), получаем формулу

$$q_2 = \frac{1}{2\chi \sqrt{\gamma\theta}} \left[\theta + \frac{1}{\theta} + 2\sqrt{\gamma}(q_1 + \Psi^2) + \beta\Psi \sqrt{4\gamma\theta^2} \right]. \quad (5.13)$$

Эту формулу можно упростить, если принять допущение $\gamma \ll y^2$, $\beta \sqrt{\gamma} y \ll y^2$. В этом случае

$$\theta = \sqrt{\gamma} q_1 + \sqrt{3 + \gamma q_1^2}, \quad (5.14)$$

$$q_2 = \frac{1}{2\chi \sqrt{\gamma\theta}} \left(\theta + \frac{1}{\theta} + 2\sqrt{\gamma} q_1 \right). \quad (5.15)$$

Количество волн по окружности определяется выражением

$$n^2 = \sqrt{\theta}/\omega, \quad (5.16)$$

где

$$\omega = \frac{L}{\pi R} (k_2^2 A_{11} D_{22})^{1/4}. \quad (5.17)$$

Формулы (5.13), (5.15) точнее (5.6), поскольку они учитывают зависимость волнообразования от продольного усилия. Более точное значение критического давления можно получить по

(5.1), где значение y надо подобрать из условия минимума q_2 . Это значение следует разыскивать вблизи (5.11). Или же определить y из уравнения (5.9), решая его графически.

Отметим работы А. А. Ильющина [25.6], Н. С. Ганиева [26.3], Радхакришнана [26.18] и Ли [26.15], в которых рассматривалась задача устойчивости оболочки при внешнем давлении и сжатии.

Эксперименты. Испытания 31 оболочки из алюминиевого сплава провел Ли [26.15]. В этих испытаниях было замечено существенное значение порядка приложения нагрузок. Отношение экспериментального усилия сжатия к расчетному в зависимости от порядка нагружения изменялось от 1,032 до 1,446.

Длинные оболочки. В этом случае из характеристического уравнения (1.6) получаем ($\lambda^2 \ll n^2$)

$$q_3 = \frac{1}{\omega^2} \left[\omega^2 (n^2 - 1) + \frac{1}{\omega^2 n^4 (n^2 - 1)} - 2q'_1 \frac{n^2 + 1}{n^2 (n^2 - 1)} \right]. \quad (5.18)$$

Здесь

$$q'_1 = -\frac{T_1^0}{N'_0}, \quad N'_0 = 2 \left(\frac{k_s^2 D_{22}}{A_{II}} \right)^{1/2}, \quad (5.19)$$

а ω , q_3 определяются согласно (3.11), (3.21). Зависимость (5.18) по форме совпадает с аналогичной зависимостью гл. XI для упругих оболочек. Поэтому можно использовать результаты, полученные в гл. XI.

§ 6. Сжатие и внутреннее давление

В случае оболочек средней длины имеет место осесимметричная форма потери устойчивости, поэтому в характеристическом уравнении (1.5) слагаемое, содержащее T_2^0 , пропадает. Внутреннее давление будет сказываться через модули E_c , E_k , которые с ростом давления уменьшаются за счет роста интенсивности напряжений. Уменьшение модулей ведет соответственно к уменьшению критического усилия осесимметричной формы потери устойчивости.

В случае длинных оболочек вместо выражения (2.25) имеем

$$q'_1 = \frac{(1 + \mu^2)(n^2 - 1)}{2\mu(n^2 + 1)} - q_3 \frac{\mu}{2(n^2 + 1)}, \quad (6.1)$$

где q_3 определяется согласно (3.21).

Выражение (6.1) имеет минимум при $n = 2$ и

$$\mu = \frac{5}{6} q_3 + \left(\frac{25}{36} q_3^2 + 1 \right)^{1/2}. \quad (6.2)$$

Эксперименты проводились В. И. Королевым, И. Г. Смирновым, В. Н. Соколовым [26.7] (1961), Ли [26.14] (1961) и др. В первой работе испытано 36 оболочек, изготовленных сваркой из

листов сплава АМГ6-Т и из стали 18Н9Т. Во второй работе испытано 24 оболочки из алюминиевого сплава 3003-0. Оболочки теряли устойчивость по осесимметричной форме. Критическое усилие сжатия с ростом внутреннего давления уменьшалось. В работе [26.14] было замечено небольшое, но достаточно замет-

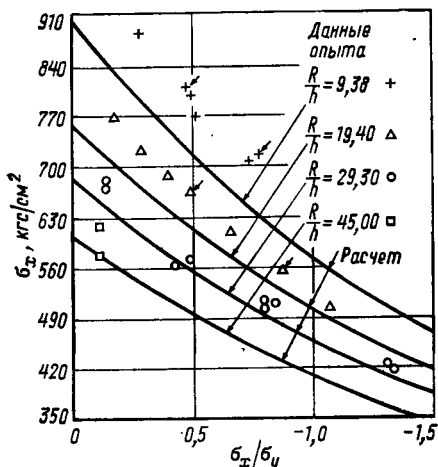


Рис. 26.10. Экспериментальные значения критических напряжений сжатия оболочки с внутренним давлением.

ное влияние порядка нагружения оболочки. На рис. 26.10 показаны результаты экспериментов [26.14]. Стрелками указаны результаты, полученные при нагружении осевым усилием и внутренним давлением, прикладываемыми малыми долями. Остальные результаты соответствуют случаю, когда вначале прикладывалось осевое сжатие, потом малыми долями внутреннее давление до тех пор, пока осевое сжатие не станет равным нулю. Потом снова давалось осевое сжатие до потери устойчивости. Сплошными линиями на рис. 26.10 показаны расчетные значения, полученные по деформационной теории в предположении несжимаемости материала оболочки. Заметим, что деформационная теория не позволяет оценить историю нагружения. Для этого следует привлекать теорию течения.

Глава XXVII

НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

В этой главе будут приведены некоторые сведения по локальной устойчивости оболочек вращения, конических и сферических оболочек.

§ 1. Оболочки вращения

Уравнение локальной устойчивости оболочек вращения можно получить из уравнений (2.42) гл. XXV, исключив из них функцию усилий с помощью обратного оператора ∇_1^{-4}

$$F = -\nabla_1^{-1}(k_1 w_{yy} + k_2 w_{xx}) \quad (1.1)$$

и опустив слагаемые в фигурных скобках:

$$\nabla_2^4 w + \nabla_1^{-4} (k_1^2 w_{yyyy} + 2k_1 k_2 w_{xxyy} + k_2^2 w_{xxxx}) - \\ - T_1^0 w_{xx} - T_2^0 w_{yy} - 2T_3^0 w_{xy} = 0. \quad (1.2)$$

Задавая функцию прогиба в виде

$$w = C \sin k_2 \lambda x \sin k_2 n y \quad (\lambda = \kappa m, \kappa = R_2/R_1),$$

где m, n — числа волн в меридиональном и окружном направлениях, получим из (1.2) характеристическое уравнение для случая осесимметричного нагружения ($T_3^0 = 0$)

$$k_2^2 (D_{11} \lambda^4 + D_3 \lambda^2 n^2 + D_{22} n^4) + \frac{(\lambda^2 + \kappa n^2)^2}{A_{11} n^4 + A_3 \lambda^2 n^2 + A_{22} \lambda^4} + \\ + T_1^0 \lambda^2 + T_2^0 n^2 = 0. \quad (1.3)$$

Рассмотрим случай действия внешнего равномерного поперечного давления q . В этом случае

$$T_1^0 = -\frac{q R_2}{2}, \quad T_2^0 = -\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right) q R_2. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.3), находим ($\gamma = n^2/\lambda^2$),

$$q = \frac{k_2}{1/2 + (1 - 1/2\kappa)\gamma} \left[(k_2^2 \lambda^2 (D_{11} + D_3 \gamma + D_{22} \gamma^2) + \frac{(1 + \kappa \gamma)^2}{\lambda^2 (A_{11} \gamma^2 + A_3 \gamma + A_{22})}) \right]. \quad (1.5)$$

В случае упругой оболочки ($D_{11} = D_{22} = 1/2 D_3 = D$, $A_{22} = A_{11} = 1/2 A_3 = (Eh)^{-1}$) из (1.5) следует формула

$$q = \frac{k_2 E h}{1/2 + (1 - 1/2\kappa)\gamma} \left[\lambda^2 (1 + \gamma^2) \frac{h^2}{12 (1 - \nu^2) R_2^3} + \frac{(1 + \gamma \kappa)^2}{\lambda^2 (1 + \gamma^2)} \right], \quad (1.6)$$

полученная Ю. Н. Работновым [4.11].

При $\gamma \gg 1$ из (1.5) имеем

$$q = \frac{k_2^2}{1 - 1/2\kappa} \left(n^2 k_2^2 D_{22} + \frac{\kappa^2}{n^2 A_{11}} \right). \quad (1.7)$$

Из условия минимума $\partial q / \partial n = 0$ находим

$$n = \frac{\sqrt{\kappa}}{(k_2^2 A_{11} D_{22})^{1/4}}, \quad (1.8)$$

откуда

$$q = \frac{2\kappa}{1 - 1/2\kappa} k_2^2 \sqrt{\frac{D_{22}}{A_{11}}}. \quad (1.9)$$

Эта формула получена Э. И. Григолюком [27.1].

Если воспользоваться деформационной теорией, то

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{Eh^3}{3A} (E'_k + \alpha_1 \alpha_2), \quad D_{22} = \frac{Eh^3}{3A} (E'_k + \alpha_1 \alpha_3), \\ D_3 &= \frac{Eh^3}{3A [3 - (1 - 2\nu) E''_c]} \{ 3(1 + E'_k) - 2(1 - 2\nu) E''_k - \\ &\quad - 2[3 + (1 - 2\nu) E''_c] \alpha_1 \alpha_2 \}, \\ A_{11} &= \frac{1}{E_k h} (E'_k + \alpha_1 \alpha_3), \quad A_{22} = \frac{1}{E_k h} (E'_k + \alpha_1 \alpha_2), \\ A_3 &= \frac{2}{E_k h} (E'_k + \alpha_1 \alpha_2), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 3 \frac{E}{E_c} + 2(1 - 2\nu) E'_k - (1 - 2\nu)^2 E''_k - 4(1 - 2\nu) \alpha_1 \alpha_2, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{4} (1 - E'_k), \quad \alpha_2 = \frac{(3 - 2\kappa)^2}{3 - 3\kappa + \kappa^2}, \quad \alpha_3 = \frac{\kappa^2}{3 - 3\kappa + \kappa^2}, \\ E'_k &= \frac{E_k}{E_c}, \quad E''_k = \frac{E_k}{E}, \quad E''_c = \frac{E_c}{E}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В этом случае формула (1.9) имеет вид

$$q = \frac{2\kappa}{1 - 1/2\kappa} \frac{h^2}{R_2^2} \sqrt{\frac{EE_k}{3A}}. \quad (1.12)$$

Для несжимаемого материала

$$q = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{1 - 1/2\kappa} \frac{E_c h^2}{R_2^2} \sqrt{\frac{E_k}{E_c}}. \quad (1.13)$$

Если воспользоваться теорией течения, то

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{D}{K} \left(1 + \frac{\alpha_2 \psi}{4} \right), \quad D_{22} = \frac{D}{K} \left(1 + \frac{\alpha_2 \psi}{4} \right), \\ D_3 &= 2 \frac{D}{K} \left[1 + \frac{\psi}{4(1 + \nu)} \frac{9 - 3(5 - \nu)\kappa + (7 - 2\nu)\kappa^2}{3 - 3\kappa + \kappa^2} \right], \\ A_{11} &= \frac{1}{Eh} \left(1 + \frac{\alpha_2 \psi}{4} \right), \quad A_{22} = \frac{1}{Eh} \left(1 + \frac{\alpha_3 \psi}{4} \right), \\ A_3 &= \frac{2}{Eh} \left[1 + \frac{\psi}{4} \frac{(3 - 2\kappa)\kappa}{3 - 3\kappa + \kappa^2} \right], \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} K &= 1 + \frac{\psi}{4(1 - \nu^2)} \frac{9 - 6(2 - \nu)\kappa + (5 - 4\nu)\kappa^2}{3 - 3\kappa + \kappa^2}, \\ \psi &= \frac{E_k}{E} - 1, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В этом случае формула (1.9) дает

$$q = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\kappa}{1 - 1/2\kappa} \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{Eh^2}{R_2^2}. \quad (1.16)$$

Упругой оболочке соответствует $k = 1$.

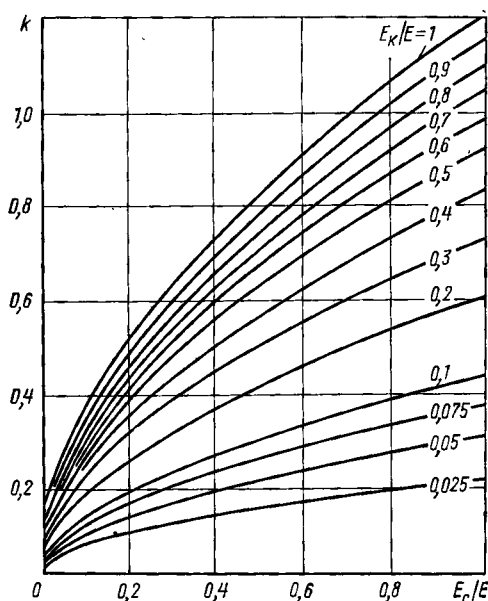


Рис. 27.1 Относительное критическое внешнее давление сферической оболочки.

Полученные формулы можно использовать для различных оболочек вращения. Например, для сферы в них следует положить $\kappa = 1$. При этом

$$q = k \frac{Eh^2}{R_2^2}, \quad (1.17)$$

где с учетом сжимаемости материала в упругой области по деформационной теории [25.2] имеем:

$$k = \frac{4 \left(\frac{E_k}{E} \frac{E_c}{E} \right)^{1/2}}{\left[3 \left(1 + \frac{1-2\nu}{E} E_k \right) \left(3 - \frac{1-2\nu}{E} E_c \right) \right]^{1/2}}, \quad (1.18)$$

по теории течения [26.4]

$$k = \frac{2}{\left[\frac{3}{2} (1 + \nu) \left(1 - 2\nu + \frac{E}{E_K} \right) \right]^{1/2}}. \quad (1.19)$$

Для несжимаемого материала эти величины будут:
по деформационной теории

$$k = \frac{4}{3} \left(\frac{E}{E} \frac{E_c}{E} \right)^{1/2}, \quad (1.20)$$

по теории течения

$$k = \frac{4}{3} \left(\frac{E_K}{E} \right)^{1/2}. \quad (1.21)$$

На рис. 27.1 показаны значения k по деформационной теории. Формула (1.20) приведена в [26.10].

§ 2. Коническая оболочка

Задача локальной устойчивости усеченных конических оболочек без учета разгрузки и сжимаемости материала в рамках деформационной теории исследовалась А. В. Саченковым [27.3] (1956). В этом случае напряженное состояние неоднородно. При локальной потере устойчивости неоднородность можно не учитывать. Для суммарной критической силы сжатия при осесимметричной форме потери устойчивости в работе [27.3] получена формула

$$N = \frac{8\pi}{3} E h \cos \alpha \left[\left(1 - \frac{E_r}{E} \right) \left(1 - \frac{E_K}{E} \right) \right]^{1/2}, \quad (2.1)$$

где 2α — угол конуса.

ЛИТЕРАТУРА

К главе I. Теория поверхностей

- 1.1. Норден А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.
- 1.2. Ращевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1956.
- 1.3. Фиников С. П. Теория поверхностей. М. — Л., ОНТИ, 1934.

К главе II. Уравнения нелинейной теории оболочек

- 2.1. Алумяэ Н. А. Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. Прикл. матем. и механ., 1949, т. 13, № 1, стр. 95—106.
- 2.2. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории оболочек. Прикл. матем. и механ., 1944, т. 8, № 2, стр. 109—140.
- 2.3. Гольденвейзер А. Л. Уравнения теории тонких оболочек. Прикл. матем. и механ., 1940, т. 4, № 2, стр. 35—42.
- 2.4. Даревский В. М. Нелинейные уравнения равновесия оболочки. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 3, стр. 537—539.
- 2.5. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. Прикл. матем. и механ., 1940, т. 4, № 2, стр. 7—34.
- 2.6. Муштари Х. М. Об определении деформаций срединной поверхности оболочки при произвольных изгибах. Тр. Казанск. хим.-техн. ин-та, 1948, № 13, стр. 132—137.
- 2.7. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткигоиздат, 1957.
- 2.8. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948; Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
- 2.9. Работнов Ю. Н. Основные уравнения теории оболочек. Докл. АН СССР, Нов. сер., 1945, т. 47, № 2, стр. 90—93.
- 2.10. Шкутин Л. И. Об одном представлении уравнений нелинейной теории упругих оболочек. Труды VI Всес. конференции по теории оболочек и пластинок, 1966, М., «Наука», 1966, стр. 841—848.
- 2.11. Berkovitz H. M. Comments on: «Strain-displacement relations in large displacement theory of shells» by C. H. Tsao. AIAA Journal, 1965, vol. 3, № 11, p. 2176.
- 2.12. Chien W. Z. The intrinsic theory of thin shells and plates. I. General theory. II. Application to thin plates. III. Application to thin shells. Quart. Appl. Math., 1943, vol. 1, № 4, pp. 297—327; 1944, vol. 2, № 1, pp. 43—59; № 2, pp. 120—135.
- 2.13. Koiter W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. Parts I, II, III. Proc Koninkl. nederl. akad. wet., 1966, vol. B69, № 1, pp. 1—17; pp. 18—32; pp. 33—54.
- 2.14. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4 edit. Cambridge, 1927; русск. перевод: Ляв А. Математическая теория упругости. М. — Л., ОНТИ, 1935.

- 2.15. Lukaszewicz S. The equations of the theory of nonshallow thin shells. Arch. budowy maszyn, 1965, t. 12, № 4, SS. 431—443.
- 2.16. Sanders J., Lyell J. Nonlinear theories for thin shells. Quart. Appl. Math., 1963, vol. 21, № 1, pp. 21—36.
- 2.17. Tsao C. H. Strain-displacement relations in large displacement theory of shells. AIAA Journal, 1964, vol. 2, № 11, pp. 2060—2062.

К главе III. Техническая теория оболочек

- 3.1. Власов В. З. Общая теория оболочек. М., Гостехиздат, 1949; Избранные труды. Том I, ч. III. М., АН СССР, 1962.
- 3.2. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
- 3.3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953; М., «Наука», 1976.
- 3.4. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия. Прикл. матем. и механ., 1939, т. 2, № 4, стр. 439—456.
- 3.5. Муштарн Х. М. Теория упругого равновесия пластин и оболочек с учетом начальных напряжений. Изв. Казан. фил. АН СССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1950, № 2, стр. 39—52.
- 3.6. Назаров А. А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. М. — Л., Стройиздат, 1966.
- 3.7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. М., Оборонгиз, 1941; 2 изд.: Л., Судпромгиз, 1951.
- 3.8. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Л., Изд. ЛГУ, ч. I: 1962; ч. II: 1964.
- 3.9. Donnell L. H. Stability of thin-walled tubes under torsion. NASA Rept, 1933, № 479; русск. перевод: Доннел Л. Х. Устойчивость тонкостенных труб при кручении. М., ЦАГИ, 1937, стр. 29—57.
- 3.10. Marguerre K. Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung. Jahrb. 1939 deutsch. Luftfahrtforschung. Bd. 1. Berlin, Adlershof Bücherei, 1939, SS. 413—426; Proc. 5th Internat. Congr. Appl. Mech. Cambridge, Mass., 1938. New York, J. Wiley and Son, 1939, pp. 93—101.

К главе IV. Уравнения устойчивости оболочек

- 4.1. Болотин В. В. Вопросы общей теории упругой устойчивости. Прикл. матем. и механ., 1956, т. 20, № 5, стр. 561—575.
- 4.2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
- 4.3. Болотин В. В. Нелинейная теория упругой устойчивости в большом. В сб. Расчеты на прочность. № 3. М., Машгиз, 1958, стр. 350—354.
- 4.4. Болотин В. В. Некоэрвативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
- 4.5. Болотин В. В. Об уравнениях теории устойчивости тонких упругих оболочек. Инж. журнал. Механ. тверд. тела, 1967, № 4, стр. 117—123.
- 4.6. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. Итоги науки. Механ. тверд. деформ. тел. 1967. М., ВИНТИ, 1969.
- 4.7. Даревский В. М. Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризация в задачах устойчивости. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, 1966. М., «Наука», 1966, стр. 355—368.
- 4.8. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
- 4.9. Новожилов В. В. Общая теория устойчивости оболочек. Докл. АН СССР, 1941, т. 32, № 5, стр. 316—319.

- 4.10. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М., «Наука», 1966.
- 4.11. Работнов Ю. Н. Локальная устойчивость оболочек. Докл. АН СССР, Нов. сер., 1946, т. 52, № 2, стр. 111—112.
- 4.12. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
- 4.13. Bryan G. H. On the stability of elastic system. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1889, vol. 6, pp. 199—210.
- 4.14. Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate quidentas, sive solution problematis isoperitrici lattissimo sensu accepti. Additamentum I: De curvis elasticis. Lausannae et Genesvae, Apud Marcum-Mirhaelum, Bousquet et Socios, 1744, SS. 245—340; русск. перевод: Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решения изопериметрической задачи, взятая в самом широком смысле. Сер. «Классики естествознания». Прилож. I: Об упругих кривых. М. — Л., ОНТИ, 1934, стр. 447—572.
- 4.15. Flügge W. Statik und Dynamik der Schalen. Berlin, Springer, 1934; 2-te Aufl.: 1957; русск. перевод: Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М., Стройиздат, 1961.
- 4.16. Timoshenko S. P. Theory of elastic stability. New York — London, McGraw-Hill Book Co., 1936; русск. перевод: Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1946; 2-е изд.: 1955.
- 4.17. Ziegler H. Principles of structural stability. Waltham — Massachusetts — Toronto — London, Blaisdell Publ. Co., 1968; русск. перевод: Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М., «Мир», 1971.

К главе V. Уравнения круговой цилиндрической оболочки

- 5.1. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. Итоги науки. Механ. тверд. деформ. тел. 1967. М., ВИНТИ, 1969.
- 5.2. Даревский В. М. Уравнения устойчивости цилиндрических оболочек. Инж. журнал., 1963, т. 3, № 4, стр. 658—664.
- 5.3. Batdorf S. B. A. A simplified method of elastic stability analysis for thin cylindrical shells. I. Donnell's equations. NACA Techn. Note, 1947, № 1341; II. Modified equilibrium equation. NACA Tech. Note, 1947, № 1342; NASA Rept, 1947, № 874.
- 5.4. Flügge W. Die stabilität der Kreiszyllinderschale. Ing.-Arch., 1932, Bd 3, № 5, SS. 463—506.
- 5.5. Hoff M. T. The accuracy of Donnell's equations. J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, № 3, pp. 329—334.
- 5.6. Kempner J. Remarks on Donnell's equations. J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, № 1, pp. 117—118.
- 5.7. Loo T. T. An extension of Donnell's equations for circular cylindrical shell. J. Aeron. Sci., 1957, vol. 24, № 5, pp. 390—391.
- 5.8. Morley L. S. D. An improvement of Donnell's approximation for thin-walled circular cylinders. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, vol. 12, № 1, pp. 89—99.
- 5.9. Sanden K., Tölke F. Über Stabilitätsprobleme dünner kreiszyllindrischer Schalen. Ing.-Arch., 1932, Bd 3, № 1, SS. 24—66.
- 5.10. Yu Y. Y. On the Donnell equations and Donnell-type equations of thin cylindrical shells. Proc. 3-rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. Providence, Rhode Island, 1958. New York, 1958, pp. 419—487.

К главе VI. Методы исследования устойчивости оболочек

- 6.1. Алфутов Н. А., Балабух Л. И. Энергетический критерий устойчивости упругих тел, не требующий определения начального напряжен-

- по-деформированного состояния. Прикл. матем. и механ., 1968, т. 32, № 4, стр. 703—707.
- 6.2. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. С.-Пб., Литографир. изд., 1909; С.-Пб., тип. Морск. мин-ва, ч. I: 1912; ч. II: 1914.
- 6.3. Бубнов И. Г. Отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем». Сб. С.-Пб. ин-та инж. путей сообщ., 1913, вып. 81, стр. 33—36; Избранные труды. Л., Судпромгиз, 1956, стр. 136—139.
- 6.4. Власов В. З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек. Строит. пром., 1932, № 11, стр. 33—37; № 12, стр. 21—26.
- 6.5. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
- 6.6. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963; Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
- 6.7. Галеркин Б. Г. Стержни и пластинки. Вестник инженеров, 1915, т. 1, № 19, стр. 897—908; Собр. сочинений. Том 1. М., АН СССР, 1952, стр. 168—195.
- 6.8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
- 6.9. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
- 6.10. Зволинский Н. В. Приближенное решение некоторых задач устойчивости цилиндрической оболочки. Тр. ЦАГИ, 1936, вып. 246.
- 6.11. Кабанов В. В., Утешев В. С. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек при изгибе силой. Инж. журнал, Механ. тверд. тела, 1968, № 2, стр. 65—69.
- 6.12. Кабанов В. В., Бадрухин Ю. И. Влияние нагрева на устойчивость оболочек. Инж. журн. Механ. тверд. тела, 1969, № 3, стр. 91—95.
- 6.13. Кабанов В. В. Исследование устойчивости оболочек методом конечных разностей. Изв. АН СССР, Механ. тверд. тела, 1971, № 1, стр. 24—29.
- 6.14. Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. Изв. АН СССР, Отд. матем. и естеств. наук, 1933, № 5, стр. 647—652; О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 7, стр. 579—582.
- 6.15. Кукуджанов С. Н. О наилучших начальных приближениях в проблеме собственных чисел в методах Рунге и Бубнова — Галеркина. Теория оболочек и пластин. Труды VI Всесоюзн. конф. по теор. оболоч. и пластин. Ереван, АН АрмССР, 1964, стр. 621—625.
- 6.16. Липовцев Ю. В. К устойчивости вязко-упругих и упругих оболочек при наличии локальных напряжений. Инж. журнал, Механ. тверд. тела, 1968, № 5, стр. 174—180.
- 6.17. Липовцев Ю. В. Особенности применения метода прогонки к решению задач устойчивости оболочек и пластин. Изв. АН СССР, Механ. тверд. тела, 1970, № 3, стр. 43—49.
- 6.18. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
- 6.19. Мяченков В. И. Устойчивость ортотропных оболочек вращения, находящихся под действием осесимметричных нагрузок. Инж. журнал. Механ. тверд. тела, 1968, № 1, стр. 106—113.
- 6.20. Саченков А. В. Об одном подходе к решению нелинейных задач устойчивости тонких оболочек. В сб. Нелинейная теория пластин и оболочек. Казань, Казанск. ун-т, 1962, стр. 3—41; О поверхностях выпучивания тонких оболочек при локальной потере устойчивости. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 6, стр. 1243—1246.
- 6.21. Тимошенко С. П. К вопросу об устойчивости упругих систем. Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1910, кн. 2, стр. 147—167; Об устойчивости упругих систем. Применение новой методики к исследованию устойчивости некоторых мостовых конструкций. Изв. Киевск. политехн. ин-та,

- 1910, кн. 4, стр. 375—560; Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., «Наука», 1971, стр. 191—383.
- 6.22. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.
- 6.23. Шкутин Л. И. Влияние докритических деформаций на устойчивость продольно сжатой цилиндрической оболочки. Прикл. механика, 1967, т. 3, № 1, стр. 127—130.
- 6.24. Almqvist B. O. Influence of edge condition on the stability of axially compressed cylindrical shells. AIAA Journal, 1966, vol. 4, № 1, pp. 134—140.
- 6.25. Bryan G. H. Application of the energy test to the collapse of a thin long pipe under external pressure. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1888, vol. 6, pp. 287—292.
- 6.26. Budiansky B., Hu P. The Lagrangian multiplier method of finding upper and lower limits to critical load of clamped plates. NACA, Techn. Note, 1946, № 1103.
- 6.27. Evensen D. A., High-speed photographic observation of the buckling of thin cylinders. Exptl Mech., 1964, vol. 4, № 4, pp. 110—117.
- 6.28. Fourier M. Theorie analytique de la chaleur. Paris, Didot, 1822.
- 6.29. Huang N. C. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. Trans. ASME, Ser. E, 1964, vol. 31, № 3, pp. 447—457.
- 6.30. Radkowski P. P., Devis R. M., Bolduc M. R. Numerical analysis of equations of thin shells of revolution. J. Aero/Space Sci., 1962, vol. 32, pp. 36—41.
- 6.31. Rayleigh J. W. S. Some general theorems relating to vibrations. Proc. London Math. Soc., 1873, vol. 4, pp. 357—368; The theory of Sound. Vol. 1. London, Macmillan, 1929; русск. перевод: Релей Д. В. Теория звука. Том 1. М., Гостехиздат, 1940.
- 6.32. Ritz W. Über eine Methode zur Lösung gewisser Variations Probleme der mathematischen Physik. J. reine und angew. Math., 1909, Bd 135, Nr. 1, SS. 1—61; Gesammelte Werke. Paris, Gauthier-Villars, 1911, SS. 192—250.

К главе VII. Осевое сжатие

- 7.1. Бруде Б. М. Об устойчивости несовершенных цилиндрических оболочек при осевом сжатии. Строит. механ. и расчет сооруж., 1967, № 5, стр. 36—40.
- 7.2. Гейзенблазен Р. Е., Моссаковский В. И., Сотников Д. И. Докритическое поведение цилиндрических оболочек. Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970, стр. 167—171.
- 7.3. Геммерлинг А. В. Испытание на сжатие цилиндрических оболочек. Строит. механ. и расчет сооруж., 1963, № 2, стр. 19—23.
- 7.4. Кабаиов В. В. Устойчивость продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной по краям упругими кольцами. Изв. АН СССР, Механ. тверд. деформ. тела, 1970, № 3, стр. 50—56.
- 7.5. Кан С. Н. К вопросу об устойчивости круговых цилиндрических оболочек при сжатии. Строит. механ. и расчет сооруж., 1963, № 6, стр. 31—34; в сб. Пробл. устойчивости в стрит. механ. М., Стройиздат, 1965, стр. 259—265.
- 7.6. Кильчевский Н. А. Об осесимметричных деформациях и упругой устойчивости круглой трубы, находящейся под действием продольных сжимающих сил. Прикл. матем. и механ., 1942, т. 6, № 6, стр. 497—508.
- 7.7. Кильчевский Н. А., Никулинская С. Н. Об осесимметричной форме потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки. Прикл. механика, 1965, т. 1, № 11, стр. 1—6.

- 7.8. Кожевников В. И. О величине критической силы при осевом сжатии цилиндрической оболочки (в линейной постановке). Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 3, стр. 137—141.
- 7.9. Коц В. М., Липовский Д. Е. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек с учетом начальных несовершенств. Тр. VI Всесоюз. конференции по теории оболочек и пластинок, 1966. М., «Наука», 1966, стр. 509—515.
- 7.10. Кузнецов В. К., Липовцев Ю. В. Влияние локальных несовершенств на устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Изв. АН СССР. Механ. тверд. деформ. тела, 1970, № 1, стр. 134—136.
- 7.11. Куршин Л. М., Присекин В. Л. Равновесные состояния цилиндрической оболочки с начальными прогибами при сжатии. Прикл. матем. и механ., 1969, № 2, стр. 299—303.
- 7.12. Тимошенко С. П. К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки. Вестн. о-ва технол., 1914, т. 21, стр. 785—792; Изв. Петрогр. электротехн. ин-та, 1914, т. 11, стр. 267—287; Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., «Наука», 1971, стр. 457—472.
- 7.13. Almroth B. O. Post-buckling behaviour of axially compressed circular cylinders. AIAA Journal, 1963, vol. 1, № 3, pp. 630—633.
- 7.14. Almroth B. O., Holmes A. M., Brush D. O. An experimental study of the buckling of cylinders under axial compression. Exptl Mech., 1964, vol. 4, No 9, pp. 263—270.
- 7.15. Almroth B. O. Influence of imperfections and edge restraint on the buckling of axially compressed cylinders. NASA, Council Rept, 1966, April, No 432.
- 7.16. Amazigo J. C. Buckling under axial compression of long cylindrical shells with random axisymmetric imperfections. Quart. Appl. Math., 1969, vol. 24, № 4, pp. 537—566.
- 7.17. Arbocz J., Babcock J. C. D. The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells. Trans. ASME, Ser. E, 1969, vol. 36, No. 1, pp. 28—38.
- 7.18. Arbocz J. Buckling of axially compressed imperfect cylindrical shells. AIAA Paper, 1971, No. 358.
- 7.19. Babcock C. D., Sechler E. E. The effect of initial imperfections on the buckling stress of cylindrical shells. NASA, Techn. Note, 1962, No. D-1510, pp. 135—142; 1963, No. D-2005.
- 7.20. Bucko S. Analiza stateczności osiowo sciskanych powłok walcowych metoda uogólnionych szeregów potęgowych. Azch. budowy maszyn, 1966, t. 13, No. 3, ss. 307—327.
- 7.21. Cohen G. A. Buckling of axially compressed cylindrical shells with ring-stiffened edges. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 10, pp. 1859—1862.
- 7.22. Corman D., Evan-Iwanowski R. Photoelastic analysis of prebuckling deformations of cylindrical shells. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 10, pp. 1956—1958.
- 7.23. Donnell L. H. A. New theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. Trans. ASME, Ser. E, 1934, vol. 56, pp. 795—806.
- 7.24. Donnell L. H., Wan C. C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. J. Appl. Mech., 1950, vol. 17, No. 1, 73—83; Discussion on the paper: J. Appl. Mech., 1950, vol. 17, No. 3, pp. 340—342; русск. перевод: Доннелл Л., Уан К. Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии. Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит-ры, 1951, № 4, (8), стр. 91—107.
- 7.25. Dym C. L., Hoff N. J. Perturbation solutions for the buckling problems of axially compressed thin cylindrical shells of infinite or finite length. Trans. ASME, Ser. E, 1968, vol. 35, No. 4, pp. 754—762.

- 7.26. Hoff N. J., Soong T. C. Buckling of circular cylindrical shells in axial compression. *Internat. J. Mech. Sci.*, 1965, vol. 7, No. 7, pp. 489—520.
- 7.27. Hoff N. J. Low buckling stresses of axially compressed circular cylindrical shells of finite length. *Trans. ASME, Ser. E*, 1965, vol. 32, No. 3, pp. 533—541.
- 7.28. Hoff N. J., Rehfield L. W. Buckling of axially compressed circular cylindrical shells at stresses smaller than the classical critical value. *Trans. ASME, Ser. E*, 1965, vol. 32, No. 3, pp. 542—546.
- 7.29. Hoff N. J., Madsen W. A., Mayers J. Postbuckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, No. 14, pp. 126—133.
- 7.30. Hoff H. J. The perplexing behavior of thin circular cylindrical shells in axial compression. *Israel J. Technol.*, 1966, vol. 4, No. 1—2, pp. 1—28.
- 7.31. Hutchinson J. W., Tennison R. S., Muggeridge D. B. Effect of a local axisymmetric imperfection on the buckling behavior of a circular cylindrical shell under axial compression. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, No. 1, pp. 48—52.
- 7.32. Jamaki N., Kodama S. Buckling of circular cylindrical shells under compression. *Rept 1: Sci. Repts Res. Inst. Tohoku Univ. B: High Speed Mech.* 1971, vol. 23, pp. 99—123; *Rept 2: 1971, vol. 24, pp. 111—142.*
- 7.33. Jones R. M. Toward a new snap-through buckling criterion for axially compressed circular cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, No. 9, pp. 1526—1530.
- 7.34. Kanemitsu S., Nojima N. M. Axial compression tests of thin circular cylinders. M. S. Thesis, Calif. Inst. Technol., 1939.
- 7.35. Karman T. L., Tsien H. S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *J. Aeronaut. Sci.*, 1941, vol. 8, No. 8, pp. 303—312; Karman Th. L. The collected works. Vol. 4. London, Butterworths, 1956, pp. 107—126.
- 7.36. Koiter W. T. Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht. *Doct. thesis. Amsterdam*, 1945.
- 7.37. Koiter W. T. The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression. *Proc. Koninkl. nederl. acad. Wet.*, 1963, vol. B66, No. 5, pp. 265—279.
- 7.38. Lilly W. E. The design of struts. *Engineering*, 1908, vol. 85, pp. 37—40.
- 7.39. Lorenz R. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder. *Physikal. Zeitschrift*, 1911, Bd 12, Nr. 7, SS. 241—260.
- 7.40. Lu S. V., Nash W. A. Buckling of initially imperfect axially compressed cylindrical shells. *NASA, Techn. Note*, 1962, No. D-1510, pp. 187—202.
- 7.41. Madsen W. A., Hoff N. J. The snap-through and post-buckling equilibrium behavior of circular cylindrical shells under axial load. *Univ. Stanford. Dept. Aeronaut. Engng. Rept.*, 1965, No. 227.
- 7.42. Mallock A. Note on the instability of tubes subjected to end pressure and on the folds in a flexible material. *Proc. Roy. Soc.*, 1908, vol. 81, No. A-549, pp. 388—393.
- 7.43. Mayers J., Rehfield L. W. Further nonlinear considerations in the buckling of axially compressed circular cylindrical shell. *Proc. 9th Mid-western Mech. Conference. Madison, Univ. Wisconsin*, 1965.
- 7.44. Nachbar W., Hoff N. J. The buckling of a free edge of a axially compressed circular cylindrical shell. *Quart. Appl. Math.*, 1962, vol. 20, No. 3, pp. 267—277.
- 7.45. Narasimhan K. J., Hoff N. J. Snapping of imperfect thin-walled circular cylindrical shells of finite length. *Trans. ASME, Ser. E*, 1971, vol. 38, No. 1, pp. 160—172.
- 7.46. Ohira H. Local buckling theory of axially compressed cylinders. *Proc. 11th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, Osaka, 1961, Tokyo, 1962, pp. 37—40.

- 7.47. Ohira H. Local buckling theory for an axially compressed circular cylinder of finite length. Proc. 14th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., Kyoto, 1964, Tokyo, 1965, pp. 58—62.
- 7.48. Pflüger A. Zur praktischen Berechnung der axial gedrückten Kreiszylinderschale. Stahlbau, 1963, Bd 32, Nr. 6, SS. 161—165.
- 7.49. Simmonds J. G., Danielson D. A. New results for the buckling loads of axially compressed cylindrical shells. Trans. ASME, Ser. E, 1970, vol. 37, No. 1, pp. 93—100.
- 7.50. Sobey A. J. The buckling strength of a uniform circular cylinder loaded in axial compression. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1964, No. 3366, pp. 1—22.
- 7.51. Sobey A. J. The buckling of an axially loaded circular cylinder with initial imperfections. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1966, № 3430.
- 7.52. Tennyson R. C. A note on the classical buckling load of circular cylindrical shells under axial compression. AIAA Journal, 1963, vol. 1, № 2, pp. 475—476.
- 7.53. Tennyson R. C. Buckling of circular cylindrical shells in axial compression. AIAA Journal, 1964, vol. 2, № 7, pp. 1351—1353.
- 7.54. Tennyson R. C., Muggeridge D. B. Buckling of axisymmetric imperfect circular cylindrical shells under axial compression. AIAA Journal, 1969, vol. 7, № 11, pp. 2127—2131.
- 7.55. Tennyson R. C., Muggeridge D. B., Caswell R. D. Buckling of cylindrical shells having axisymmetric imperfection distributions. AIAA Journal, 1971, vol. 9, № 5, pp. 924—930.
- 7.56. Thielemann W. F. On the post-buckling behaviour of thin cylindrical shells. NASA, Tech. Note, 1962, № D-1510, pp. 203—216.
- 7.57. Thielemann W. F., Esslinger M. E. On the post-buckling behaviour of thin-walled axially compressed circular cylinders of finite length. Dtsch. Forschungsanstalt Luft- und Raumfahrt, Inst. für Flugzeugbau. Braunschweig, 1966.
- 7.58. Weingarten V. I., Morgan E. J., Seide P. Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression. AIAA Journal, 1965, vol. 3, № 3, pp. 500—505.

К главе VIII. Внешнее давление

- 8.1. Алфутов Н. А., Соколов В. Ф. Определение нижнего критического давления упругой цилиндрической оболочки и поведение оболочки после потери устойчивости. В сб. Расчеты на прочность в машиностр. (МВТУ, 89). М., 1958, стр. 95—110.
- 8.2. Алфутов Н. А. О зависимости значения верхнего критического давления цилиндрической оболочки от граничных условий для касательных составляющих перемещений. В сб. Теория оболочек и пластин. Ереван, АН АрмССР, 1964, стр. 193—198.
- 8.3. Алфутов Н. А. О влиянии упругого закрепления краев цилиндрической оболочки в осевом направлении на значение верхнего критического давления. В сб. Probl. устойчивости в строит. механ. М., Стройиздат, 1965, стр. 153—158.
- 8.4. Бадрухин Ю. И., Галкин С. И. Устойчивость дискретно подкрепленной кольцами нерегулярной цилиндрической оболочки переменной толщины при действии осевой нагрузки и переменного по длине бокового давления. В сб. Избранные проблемы прикладной механики. М., «Наука», 1974, стр. 63—71.
- 8.5. Булгаков Б. В. Влияние отклонений формы труб от круглой на сопротивление внешнему давлению. Тр. Гос. исслед. нефт. ин-та, 1930, вып. 7, стр. 1—103.

- 8.6. Вольмир А. С. О влиянии начальных неправильностей на устойчивость цилиндрических оболочек при внешнем давлении. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2, стр. 291—293.
- 8.7. Гусев Б. М. Некоторые вопросы расчета на устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек химической аппаратуры. Тр. Всесоюз. н.-и. и констр. ин-т хим. машиностр., 1966, № 50, стр. 9—35.
- 8.8. Иванов В. С. Одна задача статики упругой круговой цилиндрической оболочки, имеющей начальную погибь. Прикл. матем. и механ., 1958, т. 22, № 5, стр. 687—690.
- 8.9. Исанбаева Ф. С. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1955, вып. 7, стр. 51—58.
- 8.10. Михайлов В. В. О закритических деформациях цилиндрической оболочки при внешнем давлении. Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок, 1966. М., «Наука», 1966, стр. 580—582.
- 8.11. Мяченков В. И. Устойчивость цилиндрических оболочек при действии осесимметричного поперечного давления. Прикл. механика, 1970, т. 6, № 1, стр. 27—33.
- 8.12. Нагаев В. А. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при внешнем поперечном давлении. Изв. высш. учебн. заведений. Машиностроение, 1958, № 6, стр. 46—53.
- 8.13. Палкович П. Ф. Расчетные формулы для проверки устойчивости цилиндрической оболочки прочного корпуса подлодок. Бюлл. н.-техн. ком. УМВС РККА, 1929, вып. 2, стр. 113—123; Труды по прочности корабля. Л., Судпромгиз, 1956, стр. 596—607.
- 8.14. Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием равномерного поперечного давления. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-матем. и техн. н., 1958, № 12, стр. 127—132.
- 8.15. Саченков А. В., Выборнов В. Г. Влияние начальных неправильностей на устойчивость тонких оболочек. В сб. Исслед. по теории пластин и оболочек. № 3. Казань, Казанск. ун-т, 1965, стр. 24—34.
- 8.16. Bresse M. Cours de mecanique applique. P. 1. Paris, Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire du Bureau des Longitudes, 1859.
- 8.17. Brush D. O., Almroth B. O. Thin shell buckling analysis. A general expression for the second variation of the strain energy. Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Berkeley, Calif., 1962, Vol. 1. Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1962, pp. 495—505.
- 8.18. Cleaver P. C. The strength of tubes under uniform external pressure. Aeronaut. Res. Council Current Papers, 1956, N 253.
- 8.19. Donnell L. H. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders under external pressure. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, № 4, pp. 569—575.
- 8.20. Donnell L. H. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders with fixed edges under external pressure. Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Providence, Rhode Island, 1958. New York, 1958, pp. 305—311.
- 8.21. Fairbairn W. On the resistance of tubes to collapse. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1858, vol. 148, pp. 389—414.
- 8.22. Grashof F. W. Fairbairns Versuche über den Widerstand von Röhren gegen Zusammendrückung. VDI-Zeitschrift, 1859, Bd. 3, Nr. 8—9, SS. 234—243.
- 8.23. Jamaki N. Influence of prebuckling deformations on the buckling of circular cylindrical shells under external pressure. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 4, pp. 753—755.
- 8.24. Kempner J. Some results on buckling and postbuckling of cylindrical shells. NASA, Techn. Note, 1962, No. D-1510, pp. 173—186.

- 8.25. Mises R. Der Kritische Aussendruck Zylindrischer Rohre. VDI-Zeitschrift, 1914, Bd 58, Nr. 19, SS. 750—755.
- 8.26. Nash W. Buckling of thin cylindrical shells subject to hydrostatic pressure. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 21, No. 5, pp. 354—355.
- 8.27. Nash W. Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 4, pp. 264—269; русск. перевод. Нэш В. А. Влияние больших перемещений и начальных несовершенств образца на потерю устойчивости цилиндрических оболочек, находящихся под гидростатическим давлением. В сб. Вопросы прочности цилиндрич. оболочек. М., Оборонгиз, 1960, стр. 242—252.
- 8.28. Sobell H. Effects of boundary conditions on the stability of cylinders subject to lateral and axial pressure. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 8, pp. 1437—1440.
- 8.29. Southwell R. On the collapse of tubes by external pressure. Parts I, II, III. Philos. Mag., Ser. 6, 1913, vol. 25, No. 149, pp. 687—697; vol. 26, No. 153, pp. 502—510; 1915, vol. 29, No. 169, pp. 67—76.
- 8.30. Thielemann W., Esslinger M. Beul- und Nachbeulverhalten isotropie Zylinder unter Aussendruck. Stahlbau, 1967, Bd 36, № 6, SS. 161—174.
- 8.31. Windenburg D. F., Trilling C. Collapse by instability of thin cylindrical shells under external pressure. Trans. ASME, 1934, vol. 56, № 11, pp. 819—825; David W. Taylor Mod. Basin, Rept, 1934, № 385.

К главе IX. Кручение

- 9.1. Алумяэ Н. А. Критическая нагрузка длинной цилиндрической круговой оболочки при кручении. Прикл. матем. и механ., 1954, т. 18, вып. 1, стр. 27—34.
- 9.2. Кривошеев Н. И. Влияние начальных неправильностей в форме срединной поверхности на устойчивость цилиндрической оболочки при кручении. Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1956, № 10, стр. 69—80.
- 9.3. Кривошеев Н. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием сдвига. Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1958, № 12, стр. 133—142.
- 9.4. Муштари Х. М. Об устойчивости круглой тонкой цилиндрической оболочки при кручении. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1934, № 2, стр. 3—17.
- 9.5. Batdorf S. B., Stein M., Schilderout M. Critical stress of thin-walled cylinders in torsion. NACA, Techn. Note, 1947, № 1344.
- 9.6. Becker H., Gerard G. Torsional buckling of moderate-length cylinders. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, № 4, pp. 647—648.
- 9.7. Donnell L. H. Stability of thin-walled tubes under torsion. NASA, Rept, 1933, No. 479; русск. перевод: Доннел Л. Х. Устойчивость тонкостенных труб при кручении. В сб. Прочность и устойчивость конструкций в самолетостроении. М., ЦАГИ, 1937, стр. 29—57.
- 9.8. Donnell L. H. Stability of thin cylindrical shells in torsion. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1947, vol. 73, No. 10, pp. 1549—1552.
- 9.9. Loo T. Effects of large deflections and imperfections on the elastic buckling of cylinders under torsion and axial compression. Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Ann. Arbor, Mich., 1954. New York, 1955, pp. 345—357; русск. перевод: Лу Цзю-дао. Влияние больших перемещений и несовершенств образца на потерю устойчивости в упругой зоне цилиндров при кручении и осевом сжатии. В сб. Перев. иностр. статей. Вопросы прочности цилиндрических оболочек. М., Оборонгиз, 1960, стр. 218—2241.
- 9.10. Lundquist E. E. Strength test of thin-walled duralumin cylinders in torsion. NASA, Techn. Note, 1932, No. 427.

- 9.11. Nash W. A. An analytical and experimental investigation of the torsional buckling of thin cylindrical shells. Univ. Florida, Engng. and Industr. Exptl Stat., Rept, 1955, No. 1.
- 9.12. Nash W. A. Buckling of initially imperfect cylindrical shells subject to torsion. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 1, pp. 125—130.
- 9.13. Nash W. A., An experimental analysis of the buckling of thin initially imperfect cylindrical shells subject to torsion. Proc. Exptl Stress Analysis, 1959, vol. 16, No. 2, pp. 55—68.
- 9.14. Schwerin E. Die Torsionsstabilität des dünnwandigen Rohres. Proc. 1st Internat. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924. Technische Boekhandel en Drukkarij J. Waltman, 1925, SS. 255—265; Z. angew. Math. und Mech., 1925, Bd 5, № 3, SS. 235—243.
- 9.15. Sezawa K., Kubo K. The buckling of a cylindrical shell under torsion. Tokyo Univ., Aeronaut. Res. Inst., Rept, 1931, № 76.
- 9.16. Sturm R. G. Stability of thin cylindrical shells in torsion. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1947, vol. 73, № 4, pp. 471—495.
- 9.17. Yamaki N., Kodama S. Buckling of circular cylindrical shells under torsion. Rept Inst. High Speed Mech., Japan, Rept 1: 1965—1966, vol. 17, № 168, pp. 171—184; Rept 2: 1966—1967, vol. 18, № 176, pp. 121—142.
- 9.18. Yoshimura Y., Niisawa J. Lower buckling stress of circular shells subjected to torsion. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, № 3, pp. 211—216.

К главе X. Влияние внутреннего давления

- 10.1. Даревский В. М. Устойчивость цилиндрической оболочки при одновременном действии крутящих моментов и нормального давления. Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1957, № 11, стр. 137—147.
- 10.2. Кабанов В. В. Устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки при сжатии и внутреннем давлении. Изв. высш. учебн. заведений. Авиацион. техн., 1967, № 1, стр. 37—44.
- 10.3. Марьин В. А. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении и внутреннем давлении. В сб. Расчет пространств. конструкций. Вып. 5. М., Гостройиздат, 1959, стр. 475—484.
- 10.4. Almroth B. O., Brush D. O., Postbuckling behavior of pressure or core stabilized cylinders under axial compression. AIAA Journal, 1963, vol. 1, № 10, pp. 2338—2341.
- 10.5. Crate H. S., Batdorf S. B., Babb G. W. The effect of internal pressure on the buckling stress of thin-walled circular cylinders under torsion. NACA, Rept, 1944, № L-67; Advance Restricted Rept, 1944, № L4E27.
- 10.6. Fischer G. Über den Einfluss der gelenkigen Lagerung auf Stabilität dünnwandiger Kreiszylinderschalen unter Axiallast und Innendruck. Z. Flugwiss., 1963, Bd 11, № 3, SS. 111—119.
- 10.7. Fischer G. Influence of boundary conditions on stability of thin-walled cylindrical shells under axial load and internal pressure. AIAA Journal, 1965, vol. 3, № 4, pp. 736—737.
- 10.8. Fung Y. C., Sechler E. E. Buckling of thin-walled circular cylinders under axial compression and internal pressure. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, № 5, pp. 351—356.
- 10.9. Harris L. A., Suer H. S., Skene W. T., Benjamin R. J. The stability of thin-walled unstiffened circular cylinders under axial compression including the effects of internal pressure. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, № 8, pp. 587—596.
- 10.10. Hopkins H. G., Brown E. H. The effect of internal pressure on the initial buckling of thin-walled circular cylinders under torsion. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1951, № 2423, pp. 1—13.

- 10.11. Johns D. J. Some structural design aspects of space vehicles. *Advances Space Techn.* Vol. 4. London, George Newenes Ltd, 1962, pp. 123—160.
- 10.12. Lo H., Crate H. S., Schwartz E. B. Buckling of thin-walled cylinder under axial compression and internal pressure. NACA, Techn. Note, 1950, № 2021; NACA, Rept. 1951, № 1027.
- 10.13. Stein M. The effect on the buckling of perfect cylinders of prebuckling deformations and stresses induced by edge support. NACA, Techn. Note, 1962, № D-1510, pp. 217—227.
- 10.14. Thielemann W. F. New developments in the nonlinear theories of the buckling of thin cylindrical shells. Aeronautics and Astronautics. Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, pp. 76—119.
- 10.15. Weingarten V. I., Morgan E. J., Seide P. Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under combined internal pressure and axial compression. *AIAA Journal*, 1965, vol. 3, № 6, pp. 1118—1125.

К главе XI. Комбинированное нагружение

- 11.1. Броуде Б. М. Свойства граничных поверхностей в линейных и нелинейных задачах с собственными значениями. *Строит. механ. и расчет сооруже.*, 1964, № 5, стр. 5—9.
- 11.2. Броуде Б. М. О граничных поверхностях. *Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок*, 1966. М., «Наука», 1966, стр. 188—192.
- 11.3. Вольмир А. С. Теория устойчивости и больших деформаций цилиндрической оболочки при сжатии и сдвиге. В сб. *Расчет простр. конструкций*. Вып. 1. М., Гостройиздат, 1950, стр. 285—316.
- 11.4. Гришак В. З., Маневич Л. И. Влияние продольных растягивающих усилий на устойчивость цилиндрических оболочек при внешнем давлении. *Прикл. механика*, 1970, т. 6, № 8, стр. 30—35.
- 11.5. Даревский В. М. Устойчивость цилиндрической оболочки при одновременном действии крутящих моментов и нормального давления. *Изв. АН СССР. Отд. техн. н.*, 1957, № 11, стр. 137—147.
- 11.6. Зволинский Н. В. Об устойчивости сжатой цилиндрической оболочки при кручении. *Тр. ЦАГИ*, 1935, вып. 240, стр. 38—40.
- 11.7. Кабанов В. В. Устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки при совместном действии внешнего давления и продольных усилий. *Изв. Высш. учеб. заведений. Авиац. техника*, 1964, № 4, стр. 46—51.
- 11.8. Кривошеев Н. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки при совместном действии кручения и равномерного поперечного давления. *Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ. матем. и техн. н.*, 1958, № 12, стр. 143—148.
- 11.9. Кшнякин Р. И. Влияние осевой растягивающей силы на устойчивость цилиндрических оболочек при кручении и при внешнем нормальном давлении. В сб. *Прочность цилинд. оболочек*. М., Обorongиз, 1959, стр. 55—71.
- 11.10. Моссаковский В. И., Зюзин В. А., Смелый Г. Н., Конох В. И., Агеев Ю. А. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении. *Прикл. механика*, 1971, т. 7, № 5, стр. 105—109.
- 11.11. Муштарис Х. М., Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего нормального давления. *Прикл. матем. и механ.*, 1954, т. 18, № 6, стр. 667—674.
- 11.12. Папкович П. Ф. *Строительная механика корабля*. Том. II. Л., Судпромгиз, 1941.

- 11.13. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля. Том 4. Устойчивость стержней, перекрытий и пластин. Л., Судпромгиз, 1963.
- 11.14. Терещушко О. И. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении, внешнем давлении и сжатии. В сб. Расчет пространств. конструкций. Вып. 5. М., Госстройиздат, 1959, стр. 431—449.
- 11.15. Abraham L. H. Structural design of missiles and spacecraft. New York — Toronto — London, McGraw-Hill Book Co., 1962.
- 11.16. Antona E., Gabrielli G. Design of thin circular cylinders under combined loading conditions. Roy. Aeronaut. Soc. Centenary Congress, London, 1966. Internat. Council Aeronaut. Sci. Paper, 1966, № 66-32, pp. 1—25.
- 11.17. Ballerstedt W., Wagner H. Versuch über die Festigkeit dünner unversteifter Zylinder unter Schub- und Längskraften. Luftfahrtforschung, 1936, Bd 13, № 9, SS. 309—312.
- 11.18. Batdorf S. B., Stein M., Schilderout M. Critical combinations of torsion and direct axial stress for thin-walled cylinders. NACA, Techn. Note, 1947, No. 1345.
- 11.19. Bridget F. J., Jerome C. C., Vosseler A. B. Some new experiments on buckling of thin-walled construction. Trans. ASME, 1934, vol. 56, No. 8, pp. 569—578.
- 11.20. Collected papers on instability of shell structures. Washington, NASA, 1962, Techn. Note, No. D-1510, 761 p.
- 11.21. Donnell L. H. The stability of isotropic or orthotropic cylinders or flat or curved panels, between and across stiffeners, with any edge conditions between hinged and fixed, under any combination of compression and shear. NACA, Techn. Note, 1943, No. 918.
- 11.22. Ekström R. E. Buckling of cylindrical shells under combined torsion and hydrostatic pressure. Exptl Mech., 1963, vol. 3, No. 8, pp. 192—197.
- 11.23. Gerard G., Becker H. Handbook of structural stability. Part III. Buckling of curved plates and shells. NASA, Techn. Note, 1957, No. 3783.
- 11.24. Gerard G. Handbook of structural stability. Supplement to Part III — Buckling of curved plates and shells. NACA, Techn. Note, 1959, No. D-163.
- 11.25. Harris L. A., Suer H. S., Skene W. T. The effect of internal pressure on the buckling stress of thin-walled circular cylinders under combined axial compression and torsion. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 2, pp. 142—143.
- 11.26. Kaplan A., Morgan E. J., Zophree W. Some typical shell stability problems encountered in the design of ballistic missiles. NASA, Techn. Note, 1962, No. D-1510, pp. 21—33.
- 11.27. Sechler E. E., Fung J. C. Instability of thin elastic shells. Structural mechanics. Proc. 1st Sympos. Naval. Struct. Mech., Stanford Univ., 1958. Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, pp. 115—168; русск. перевод: Секлер Е. Е., Фун Юань-Чжен. Неустойчивость тонких упругих оболочек. Библ. сб. «Механика». М., Изд-во ин. лит., 1962, стр. 66—150.
- 11.28. Suer H. S., Harris L. A. The stability of thin-walled cylinders under combined torsion and external lateral or hydrostatic pressure. Trans. ASME, 1959, vol. E26, № 1, pp. 138—140.
- 11.29. Weingarten V. I. The effect of internal pressure and axial tension on the buckling of cylindrical shells under torsion. Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. Berkely, Calif. Vol. 2. Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1962, pp. 827—842.
- 11.30. Weingarten V. I., Seide P. Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under combined external pressure and axial compression. AIAA Journal, 1965, vol. 3, № 5, pp. 913—920.

К главе XII. Изгиб моментом

- 12.1. Дубяга К. М. Изгиб кривых трубок. Изв. С.-Пб. политехн. ин-та, 1909, т. 11, стр. 663—673.
- 12.2a. Коновалов Ю. В. Изгиб бесконечной цилиндрической оболочки. Прикл. матем. и механ., 1940, т. 4, № 5—6, стр. 35—54.
- 12.26. Кулаков В. М. Расчет тонкостенных цилиндров, подверженных изгибу. Новости нефт. и газ. техн. Нефт. оборуд. и средства автоматиз., 1962, № 8 стр. 17—21.
- 12.3. Плетникова Е. Д. Устойчивость корпуса цилиндрической круговой герметической кабины под действием изгиба и внутреннего давления. Тр. МАПИ, 1949, № 667.
- 12.4. Шевляков Ю. А., Маневич Л. И. Устойчивость цилиндрической оболочки при изгибе. Докл. АН УССР, 1960, № 5, стр. 605—608.
- 12.5. Brazier L. On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections. Proc. Roy. Soc., 1927, vol. A116, № 773, pp. 104—114.
- 12.6. Chwalla E. Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Achse. Z. angew. Math. und Mech., 1933, Bd 13, № 1, pp. 48—53.
- 12.7. Imperial E. F. The criterion of elastic instability of thin duralumin tubes subjected to bending. M. S. Thesis, Univ. California, Dept. Mech. Engng, 1932.
- 12.8. Karman T. Über die Formänderung dünnwandiger Rohre. VDI-Zeitschrift, 1911, Bd 55, № 45, SS. 1889—1895; The collected works. Vol. 1. London, Butterworths, 1956, pp. 304—320.
- 12.9. Lu S. Y., Nash W. A. Elastic instability of pressurized cylindrical shells under compression or bending. Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Berkeley, Calif., 1962, Vol. 1. Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1962, pp. 697—704.
- 12.10. Lundquist E. E. Strength tests of thin-walled duralumin tubes in pure bending. NACA, Rept, 1933, № 479.
- 12.11. Mossman R. W., Robinson R. G. Bending tests of metal monocoque fuselage construction. NACA, Techn. Note, 1930, № 357.
- 12.12. Reissner E. On finite pure bending of cylindrical tubes. Oster. Ingr-Arch., 1961, № 15, pp. 165—172.
- 12.13. Seide P., Weingarten V. I. On the buckling of circular cylindrical shells under pure bending. Trans. ASME, Ser. E, 1961, vol. 28, № 1, pp. 112—116.
- 12.14. Suer H. S., Harris L. A., Skene W. T., Benjamin R. J. The bending stability of thin-walled unstiffened circular cylinders including the effects of internal pressure. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, № 5, pp. 281—287.
- 12.15. Weingarten V. I. Effect of internal pressure on the buckling of circular cylindrical shells under bending. J. Aero/Space Sci., 1962, vol. 29, № 7, pp. 804—807.
- 12.16. Yao J. C. Large-deflection analysis of buckling of a cylinder under bending. Paper Amer. Soc. Mech. Engrs, 1962, № WA-46; Trans. ASME, Ser. E, 1962, vol. 29, № 4, pp. 708—714.

К главе XIII. Поперечный изгиб

- 13.1. Добряков А. А. Влияние нормального давления на устойчивость цилиндрической оболочки, нагруженной поперечной силой и изгибающим моментом. В сб. Некоторые вопросы механ. М., Оборонгиз, 1962, стр. 33—50.
- 13.2. Ильгамов М. А. Экспериментальное исследование устойчивости консольно закрепленной цилиндрической оболочки под действием попереч-

ной силы и внутреннего давления. В сб. Исслед. по теории пластин и оболочек. № 2. Казань, Казанск. ун-т, 1964, стр. 186—191.

- 13.3. Кабанов В. В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при изгибе силой. Всесоюзн. конф. по пробл. устойч. в строит. механике. Тезисы докладов. Каунас, 1967.
- 13.4. Lundquist E. E., Strength tests of thin-walled duralumin cylinders in combined transverse shear and bending. NACA, Techn. Note, 1935, № 523.

К главам XIV, XV. Неоднородное сжатие

- 14.1. Броуде Б. М. Практические методы расчета тонких оболочек на устойчивость. Тр. Цент. н.-и. ин-та строит. конструкций. Акад. стр.-ва и архит. СССР, 1962, № 13, стр. 38—69.
- 14.2. Кабанов В. В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при неоднородном сжатии. Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1963, № 1, стр. 181—183.
- 14.3. Кабанов В. В. Устойчивость трехслойной круговой цилиндрической оболочки при неоднородном сжатии. Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 4, стр. 116—119.
- 14.4. Кабанов В. В. Устойчивость конструктивно анизотропной круговой цилиндрической оболочки при неоднородном сжатии. Инж. журнал, Механ. тверд. тела, 1966, № 3, стр. 84—88.
- 14.5. Кабанов В. В., Курцевич Г. И. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки при неоднородном по длине осевом сжатии. Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела, 1976, № 2, стр. 189—193.
- 14.6. Кулаков В. М. О расчете тонкостенных цилиндров на устойчивость при осевом и внецентренном сжатии или чистом изгибе. Хим. и нефт. машиностроение, 1964, № 1, стр. 22—24.
- 14.7. Маневич Л. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном осевом сжатии. Тр. Конференции по теории пластин и оболочек, 1960. Казань, 1961, стр. 226—232.
- 14.8. Маневич Л. И. О локальной устойчивости оболочек при неравномерных нагрузках. Докл. АН УССР, 1961, № 8, стр. 1018—1021.
- 14.9. Baruch M., Hagari O. Buckling of cylindrical shells with axial surface tractions. Trans. ASME, Ser. E, 1969, vol. 36, No. 2, pp. 350—352.
- 14.10. Bijlaard P. P., Gallagher R. H. Elastic instability of a cylindrical shell under arbitrary circumferential variation of axial stress. J. Aero/Space Sci., 1960, vol. 27, No. 11, pp. 854—858, 866.
- 14.11. Horton W. H., Tenerelli D. J. The instability of unstiffened and ring stabilized thin-walled circular cylinders under nonuniform axial load conditions. Israel Journ. Technol., 1968, vol. 6, No. 1—2, pp. 11—24.
- 14.12. Weingarten V. I. The buckling of cylindrical shell under longitudinally varying loads. Trans. ASME, Ser. E, 1962, vol. 29, No. 1, pp. 81—85.

К главам XVI, XVII. Неоднородное внешнее давление

- 16.1. Андреев Л. В., Ободан Н. И. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при действии неравномерного давления. Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966, стр. 74—76.
- 16.2. Андреев Л. В., Макеев Е. М. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки при локальном нагружении внешним давлением. Прикл. механика, 1969, т. 5, № 4, стр. 123—127.
- 16.3. Андреев Л. В., Моссаковский В. И., Ободан Н. И. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольном внешнем давлении.

- Гр. VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970, стр. 629—633.
- 16.4. Кудинов А. Н., Муравидский В. И. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек под действием неравномерного внешнего давления и нагрева. Тр. VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970, стр. 318—322.
 - 16.5. Кукуджанов С. Н. Устойчивость цилиндрической оболочки под действием переменного давления. Инж. журнал., 1964, т. 4, № 3, стр. 533—538.
 - 16.6. Муштари Х. М. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием неравномерных нагрузок. Тр. физ.-техн. ин-та. Казанск. фил. АН СССР. 1954, вып. 1, стр. 77—103.
 - 16.7. Муштари Х. М., Прохоров С. В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном обжатии. Тр. Казанск. хим.-технол. ин-та, 1957 (1959), вып. 22, стр. 10—23.
 - 16.8. Прохоров С. В. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном обжатии. В сб.: Материалы 1-й конференции молодых научных работников. Казань. Физ.-техн. и матем. секция. Казань, Казанск. фил. АН СССР, 1959, стр. 131—136.
 - 16.9. Трофимов В. В. Устойчивость цилиндрической оболочки, нагруженной переменным по длине внешним давлением. Изв. высш. учебн. заведений. Машиностроение, 1968, № 6, стр. 38—42.
 - 16.10. Almroth B. O., Brush D. O. Buckling of a finite-length cylindrical shell under a circumferential band of pressure. J. Aero/Space Sci., 1961, vol. 28, № 7, pp. 573—578, 592.
 - 16.11. Almroth B. O. Buckling of a cylindrical shell subjected to nonuniform external pressure. Trans. ASME, Ser. E., 1962, vol. 29, № 4, pp. 675—682.
 - 16.12. Brush D. O., Field F. A. Buckling of a cylindrical shell under a circumferential band load. J. Aero/Space Sci., 1959, vol. 26, № 12, pp. 825—830.
 - 16.13. Hoff N. J. Buckling of thin cylindrical shell under hoop stresses varying in axial direction. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, № 3, pp. 405—412.
 - 16.14. Johns D. Local circumferential buckling of thin circular cylindrical shells. NASA, Techn. Note, 1962, № D-1510, pp. 267—276.
 - 16.15. Serpico J. C. Elastic stability of conical shell under axisymmetric pressure band loadings. AIAA Journal, 1964, vol. 2, № 2, pp. 389—391.

К главе XVIII. Неоднородное кручение

- 18.1. Кукуджанов С. Н. Устойчивость цилиндрической оболочки при действии крутящих моментов, линейно изменяющихся вдоль длины. Изв. АН СССР. Механ. и машиностроение, 1961, № 1, стр. 180—182.
- 18.2. Lu S. Y. Effect of surface shear on buckling of cylindrical shells. AIAA Journal, 1963, vol. 1, № 7, pp. 1687—1688.

К главе XIX. Локальные нагрузки

- 19.1. Королева Е. М. Устойчивость цилиндрической оболочки при моментном напряженном состоянии. Прикл. матем. и механ. 1968, № 4, стр. 696—702.
- 19.2. Липовцев Ю. В. К устойчивости упругих и вязкоупругих оболочек при наличии локальных напряжений. Инж. журнал. Механ. тверд. тела, 1968, № 5, стр. 174—180.
- 19.3. Липовцев Ю. В., Шварц Э. Б. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки под действием моментов, распределенных по торцу. Изв. Высших учебных заведений. Авиационная техника 1970, № 4, стр. 38—42.

- 19.4. Мяченков В. И., Пахомова Л. А. Устойчивость цилиндрических оболочек при сосредоточенных кольцевых нагрузках. *Илж. журнал. Механ. тверд. тела*, 1968, № 6, стр. 143—147.
- 19.5. Ясин Э. М. Устойчивость цилиндрической оболочки при напряженном состоянии осесимметричного краевого эффекта. *Изв. высш. учебн. заведений. Авиационная техника*, 1967, № 1, стр. 57—60.

К главе XX. Совместное действие однородных и неоднородных нагрузок

- 20.1. Андреев Л. В. Устойчивость цилиндрической оболочки при совместном действии изгибающего момента и внешнего давления. *Прикл. механика*, 1967, № 6, стр. 130—132.
- 20.2. Даревский В. М. Устойчивость консольной цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой с кручением и внутренним давлением. В сб. *Прочность цилиндрических оболочек*. М., Оборонгиз, 1959, стр. 72—94; в сб. *Расчет пространств. конструкций*. Вып. 5. М., Госстройиздат, 1959, стр. 431—449.
- 20.3. Кабанов В. В. Устойчивость цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой с кручением и внутренним давлением. В сб. *Избранные проблемы прикладной механики*. М., ВИНТИ, 1974, стр. 365—369.
- 20.4. Кан С. И., Бырсан К. Е. Устойчивость цилиндрических оболочек при локальных нагрузках. В сб. *Расчет пространств. конструкций*. Вып. 11. М., Госстройиздат, 1967, стр. 127—144.
- 20.5. Липовцев Ю. В., Шварц Э. Б. Влияние эксцентриситета приложения сжимающих усилий на устойчивость цилиндрической оболочки. *Изв. АН СССР, Механ. тверд. тела*, 1969, № 5, стр. 174—177.
- 20.6. Липовцев Ю. В., Шварц Э. Б. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки под действием локальных нагрузок. В сб. *Механ. деформ. тела и расчет сооружений*. Труды Новосиб. ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1970, № 96, стр. 169—175.
- 20.7. Мяченков В. И. Устойчивость цилиндрических оболочек при совместном действии осевого сжатия и локальных осесимметричных нагрузок. *Изв. АН СССР, Механ. тверд. тела*, 1969, № 5, стр. 178—181.
- 20.8. Bruhn E. F. Tests on thin-walled celluloid cylinders to determine the interaction curves under combined bending, torsion and compression or tension loads. *NACA, Techn. Note*, 1945, № 951.
- 20.9. Klein B. Interaction equation for the buckling of unstiffened cylinders under combined bending, torsion and internal pressure. *J. Aeronaut. Sci.*, 1955, vol. 22, No. 8, p. 585.
- 20.10. Rhode R. V., Lundquist E. E. Strength tests on paper cylinders in compression, bending and shear. *NACA, Techn. Note*, 1931, No. 370.

К главе XXI. Температурная устойчивость оболочек

- 21.1. Кабанов В. В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в неравномерном температурном поле. *Изв. высш. учебн. заведений. Авиат. техн.*, 1962, № 2, стр. 65—71.
- 21.2. Кабанов В. В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при неравномерном нагреве. В сб. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. Вып. 3. Киев, АН УССР, 1963, стр. 201.
- 21.3. Кабанов В. В. Устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки при продольном сжатии, внутреннем давлении и неравномерном нагреве по длине. В сб. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. Вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 159—167.
- 21.4. Кабанов В. В. Устойчивость пластической подкрепленной круговой оболочки при неравномерном нагреве и сжатии. В сб. *Тепловые*

- напряжения в элементах конструкций Вып. 6. Киев, «Наукова думка», 1966, стр. 197—204.
- 21.5. Кабанов В. В. Влияние краевого эффекта на прочность и устойчивость конструктивно-анизотропной круговой цилиндрической оболочки при сжатии, внутреннем давлении и нагреве. Изв. Высш. учебн. заведений, Авиационная техника, 1966, № 1, стр. 54—62.
- 21.6. Кабанов В. В. Температурная устойчивость оболочек. IX Научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций, Канев, 1968. Прикладная механика, 1968, № 11, стр. 137—139. Аннотация доклада.
- 21.7. Кабанов В. В. Влияние податливости опор и температуры на устойчивость круговой цилиндрической оболочки при сжатии и растяжении. Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1969, стр. 263—266.
- 21.8. Кабанов В. В. Влияние температуры и внутреннего давления на устойчивость круговой цилиндрической оболочки при сжатии и растяжении. В сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 11. Киев, «Наукова думка», 1971, стр. 185—189.
- 21.9. Кабанов В. В. Устойчивость цилиндрической оболочки при сжатии, боковом давлении и нагреве. Сб. Тепловые напряжения в элементах констр. Вып. 14. Киев, «Наукова думка», 1974, стр. 129—132.
- 21.10. Куршин Л. М. Об устойчивости при нагреве цилиндрической оболочки с холодными диафрагмами. В сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 3. Киев, АН УССР, 1963, стр. 211—219.
- 21.11. Липовцев Ю. В. Локальная устойчивость оболочек вращения при нагреве. IX научное совещание по тепловым напряж. в элементах конструкций. Киев, 1968; Прикладная механика, 1968, № 11, стр. 137—139. Аннотация доклада.
- 21.12. Мячиков В. И., Пахомова Л. А. Локальная устойчивость цилиндрических оболочек при нагреве Инж. журнал, Механ. тверд. тела, 1968, № 2, стр. 130—133.
- 21.13. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек. М., Изд. МГУ, 1968.
- 21.14. Шаповалов Л. А. Приложение методов термодинамики к некоторым температурным задачам упругой устойчивости. В сб. Прочность и деформ. материалов в неравномерных физич. полях. Вып. 2. М., Атомиздат, 1968, стр. 131—169.
- 21.15. Abir D., Nardo S. V. Thermal buckling of circular cylindrical shells under circumferential distribution. J. Aero/Space Sci., 1959, vol. 26, № 12, pp. 803—808.
- 21.16. Anderson M. Combinations of temperature and axial compression required for buckling of a ring-stiffened cylinder. NASA, Techn. Note, 1962, № D-1224.
- 21.17. Anderson M. Thermal buckling of cylinders. NASA, Techn. Note, 1962, № D-1510, pp. 255—265.
- 21.18. Bushnell D., Smith S. Stress and buckling of nonuniformly heated cylindrical and conical shells. AIAA Journal, 1971, vol. 9, № 12, pp. 2314—2321.
- 21.19. Harris L. A. Axial compression buckling of a pressurized cylinder with a thermally induced ring compression. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, № 12, pp. 1120—1121.
- 21.20. Hoff N. J. Flambement thermique des coques cylindriques circulaires a parois minces. High Temperat. Aeronaut. Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press; Milano, Tamburini ed., 1963, pp. 315—342.
- 21.21. Hoff N. J., Chao C. C., Madsen W. A. Buckling of a thin-walled circular cylindrical shell heated along an axial strip. Trans. ASME, Ser. E, 1964, vol. 31, № 2, pp. 253—258.

- 21.22. Johns D. J. Buckling due to thermal stress of cylindrical shells subjected to axial temperature distributions. Coll. Aeronaut. Granfield, Rept, 1961, № 147.
- 21.23. Pride R. A., Hall J. B., Anderson M. S. Effects of rapid heating on strength of airframe components. NACA, Techn. Note, 1957, № 4051.
- 21.24. Ross B., Mayers J., Jaworski A. Buckling of thin cylindrical shells heated along an axial strip. Exptl Mech., 1965, vol. 5, № 8, pp. 247—256; Proc. Soc. Exptl Stress Analysis, 1965, vol. 22, № 2, pp. 247—256.
- 21.25. Ross B., Hoff N. J., Horton W. H. The buckling behaviour of uniformly heated thin circular cylindrical shells. Exptl Mech., 1966, vol. 6, № 11, pp. 529—537.

К главе XXII. Оболочки вращения

- 22.1. Григолюк Э. И. Устойчивость сферической оболочки при конечных прогибах и несимметричной деформации. Изв. АН СССР. ОН, Механ. и машиностр., 1960, № 6, стр. 68—73; Proc. IUTAM Sympos. on the Theory of Thin Elastic Shells. Amsterdam, 1960, pp. 112—121.
- 22.2. Григолюк Э. И., Липовцев Ю. В. Локальная устойчивость упругих оболочек вращения. Инж. журнал. Механ. тверд. тела, 1968, № 6, стр. 134—138.
- 22.3. Григолюк Э. И., Липовцев Ю. В. К решению одного класса задач о собственных значениях для тонких оболочек вращения. В сб. Проблемы механ. тверд. деформ. тела. Л., Судостроение, 1970, стр. 129—141.
- 22.4. Кожевников А. А. Локальная устойчивость оболочек вращения. Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела, 1969, № 5, стр. 167—168.
- 22.5. Липовцев Ю. В. Локальная устойчивость оболочек вращения при нагреве. В сб. Тепловые напряж. в элементах конструкций. Киев, «Наукова думка», 1970, № 9, стр.
- 22.6. Чернышев Г. Н. Местная потеря устойчивости оболочек. Инж. журнал. Механ. тверд. тела, 1968, № 4, стр. 194—197.
- 22.7. Almroth B. O., Bushnell D. Computer analysis of various shells of revolution. AIAA Journal, 1968, vol. 6, № 10, pp. 1848—1855.
- 22.8. Cohen G. A. Computer analysis of asymmetrical buckling of ring-stiffened orthotropic shells of revolution. AIAA Journal, 1968, vol. 6, № 1, pp. 141—149.
- 22.9. Hyman B., Healey J. Buckling of prolate spherical shells under hydrostatic pressure. AIAA Journal, 1967, vol. 5, № 8, pp. 1469—1477.
- 22.10. Yao J. C. Buckling of a truncated hemisphere under axial tension. AIAA Journal, 1963, vol. 1, № 10, pp. 2316—2319.

К главе XXIII. Круговая коническая оболочка

- 23.1. Григолюк Э. И. Об устойчивости замкнутой двухслойной конической оболочки под действием равномерного нормального давления. Инженерный сб., 1954, т. 19, стр. 73—82.
- 23.2а. Григолюк Э. И. Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек. В сб. Расчет пространственных костр., 1955, вып. 3, стр. 375—420.
- 23.2б. Григолюк Э. И., Мальцев В. П., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Об одном методе решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения. Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела, 1971, № 1, стр. 9—19.

- 23.3. Мальцев В. П. Неосесимметричная потеря устойчивости конических оболочек под действием внешнего давления. Изв. АН СССР, Механ. тверд. тела, 1969, № 4, стр. 205.
- 23.4. Муштари Х. М. Приближенное решение некоторых задач устойчивости тонкостенной конической оболочки кругового сечения. Прикл. матем. и механ., 1943, т. 7, вып. 3, стр. 155—166.
- 23.5. Муштари Х. М., Саченков А. В. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии сжатия и внешнего нормального давления. Прикл. матем. и механ., 1954, т. 23, вып. 6, стр. 667—674.
- 23.6. Штаерман И. Я. Устойчивость оболочек. Труды Киевского авиационного университета, 1936, № 1.
- 23.7. Baruch M., Harari O., Singer J. Influence of in-plane boundary conditions on the stability of conical shells under hydrostatic pressure. Israel Journ. of Technology, 1967, vol. 5, № 1—2, pp. 12—24.
- 23.8. Baruch M., Harari O., Singer J. Low buckling loads of axially compressed conical shells. Trans. ASME, Ser. E., 1970, vol. 37, № 2, pp. 384—392.
- 23.9. Berkovits A., Singer J., Weller T. Buckling of unstiffened conical shells under combined loading. Exptl Mech., 1967, № 11, pp. 458—467.
- 23.10. MacCalden P. B., Matthiesen R. B. Combination torsion and axial compression tests of conical shells. AIAA Journal, 1967, vol. 5, № 2, pp. 305—309.
- 23.11. Seide P. Axisymmetric buckling of circular cones under axial compression. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, № 4, pp. 625—628.
- 23.12. Seide P. A Donnell-type theory for asymmetrical bending and buckling of thin conical shells. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, № 4, pp. 547—552.
- 23.13. Seide P. Axisymmetric buckling of circular cones under axial compression. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, № 4, pp. 625—628.
- 23.14. Seide P. A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness. NACA, Techn. Note, 1962, D-1510, pp. 401—426.
- 23.15. Seide P. On the buckling of truncated shells in torsion. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, № 2, pp. 321—328.

К главе XXIV. Сферическая оболочка

- 24.1. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М., «Машиностроение», 1976.
- 24.2. Григолюк Э. И., Мамай В. И., Фролов А. Н. Исследование устойчивости сферических оболочек при конечных перемещениях на основе различных уравнений теории оболочек. Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела, 1972, № 5, стр. 154—165.
- 24.3. Лейбензон Л. С. О приложении метода гармонических функций W. Thomson'a к вопросу об устойчивости сжатых сферической и цилиндрической упругих оболочек. Уч. записки Юрьевского ун-та, 1917, № 5, стр. 1—47; Собр. трудов. Том 1. М., АН СССР, 1951, стр. 50—85.
- 24.4. Мясенков В. И. Устойчивость сферических оболочек при совместном действии внешнего давления и локальных осесимметричных нагрузок. Изв. АН СССР, Механ. твердого тела, 1970, № 6, стр. 133—138.
- 24.5. Шкутии Л. И. Критическая величина давления для пологих сферических оболочек. Прикл. механика, 1969, т. 5, № 5, стр. 124—127.
- 24.6. Biezeno C. B. Über die Bestimmung der «Durchschlagkraft» einer schwachgekrümmten, kreisförmigen Platte. Z. angew. Math. und Mech., 1935, Bd 15, № 1—2, SS. 10—22.

- 24.7. Budiansky B., Hutchinson J. W. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, No. 9, pp. 1505—1510.
- 24.8. Bushnell D. Symmetric and nonsymmetric buckling of finitely deformed eccentrically stiffened shells of revolution. *AIAA Journal*, 1967, vol. 5, No. 8, pp. 1455—1462.
- 24.9. Evan-Ivanovski R. M., Cheng H. S., Loo T. C. Experimental investigations on deformations and stability of spherical shells subjected to concentrated loads at the apex. *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.* Vol. 1. Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1962, pp. 563—575.
- 24.10. Huang N. C. Unsymmetrical buckling of thin shallow-spherical shells. *AIAA Journal*, 1963, vol. 1, No. 4, p. 945; *Trans. ASME, Ser. E*, 1964, vol. 31, No. 3, pp. 447—457.
- 24.11. Hutchinson J. W. Imperfection sensitivity of externally pressurized spherical shells. *Trans. ASME, Ser. E*, 1967, vol. 34, No. 1, pp. 49—55.
- 24.12. Kao R., Perrone N. Asymmetric buckling of spherical caps with asymmetrical imperfections. *Trans. ASME, Ser. E*, 1971, vol. 38, No. 1, pp. 172—178.
- 24.13. Koga T., Hoff H. J. The axisymmetric buckling of initially imperfect complete spherical shells. *Internat. J. of Solids and Struct.*, 1969, vol. 5, No. 7, pp. 679—697.
- 24.14. Krenzke M. A., Kiernan T. J. Elastic stability of near-perfect shallow spherical shells. *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, No. 4, p. 784.
- 24.15. Mescoll J. Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, № 11, pp. 2041—2043.
- 24.16. Reissner E. On axisymmetric deformations of thin shells of revolution. *Proc. Symp. Appl. Math.* New York, 1950, vol. III, pp. 27—52.
- 24.17. Thurston G. A. A numerical solution of the nonlinear equations for axisymmetrical bending of shallow spherical shells. *J. Appl. Mech.*, 1961, vol. 28, № 4, pp. 551—562.
- 24.18. Weinitschke H. On the stability problem for shallow spherical shells. *J. Math. and Phys.*, 1960, vol. 38, № 4, pp. 209—231.
- 24.19. Zoelly R. Über ein Knickungsproblem an der Kugelshale. *Dissertation*, Zürich, 1915.

К главе XXV. Уравнение устойчивости оболочек за пределом упругости

- 25.1. Григолюк Э. И. О выпучивании тонких оболочек за пределом упругости. *Изв. АН СССР. Отд. техн. н.*, 1957, № 10, стр. 3—11.
- 25.2. Григолюк Э. И. Об учете сжимаемости материала при определении нижних критических нагрузок. *Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механика и машиностр.*, 1958, № 5, стр. 104—105.
- 25.3. Григолюк Э. И. Устойчивость упруго-пластических неоднородных оболочек. *Докл. АН СССР*, 1958, т. 119, № 4, стр. 663—666.
- 25.4. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость двухслойных оболочек за пределом упругости. *Инж. журнал. Механ. твердого тела*, 1966, № 4, стр. 88—96.
- 25.5. Ильюшин А. А. Устойчивость пластинок и оболочек за пределом упругости. *Прикл. матем. и механ.*, 1944, т. 8, № 5, стр. 337—360.
- 25.6. Ильюшин А. А. Пластичность. М., Гостехиздат, 1948, стр. 282—322.
- 25.7. Кабанов В. В. К расчету на устойчивость конструктивно анизотропных оболочек за пределом упругости. *Инж. журнал. Механ. тверд. тела*, 1967, № 5, стр. 111—115.
- 25.8. Сорокин В. В. Об учете сжимаемости материала в задачах устойчивости упруго-пластических пластинок и оболочек. *Инж. журнал. Механ. тверд. тела*, 1966, № 1, стр. 131—133.

- 25.9. Толоконников Л. А. О влиянии сжимаемости материалов на упруго-пластическую устойчивость пластин и оболочек. Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ.-матем. и естеств. наук, вып. 4, 1949, № 6, стр. 35—44.
- 25.10. Bijlaard P. P. Theory and test on the plastic stability of plates and shells. J. Aeronaut. Sci., 1949, vol. 16, № 9, pp. 529—541.
- 25.11. Engesser F. Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Z. Arch. und Ing. Vereines zu Hannover, 1889, Bd 35, № 4, SS. 455—462.
- 25.12. Engesser F. Über Knickfragen. Schweiz. Bauzeitung, 1895, Bd 26, № 4, SS. 24—26.
- 25.13. Hencky H. Zur Theorie plastischer Deformationen und Rierdurch im Material hervorgerufenen Nebenspannungen. Z. Math. und Mech., 1924, Bd 4, № 4, SS. 323—334; русск. перевод: Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений. В сб. Теория пластичности. М., Изд-во ин. лит., 1948, стр. 114—135.
- 25.14. Prandtl L. Spannungverteilung in plastischen Körper. Proc. 1st Internat. Congr. Appl. Mech. Delft, Holland, 1924. Delft, Techn. Boekhandel en Drukkarij J. Waltman, Ir., 1925, SS. 43—54.
- 25.15. Reiss A. Berücksichtigung der elastischer Formänderungen in der Plastizitätstheorie. Z. angew. Math und Mech., 1930, Bd 10, № 3, SS. 266—274; русск. перевод: Рейс А. Учет упругой деформации в теории пластичности. В сб. Теория пластичности. М., Изд-во ин. лит., 1948, стр. 206—222.
- 25.16. Shanley F. R. The column paradox. J. Aeronaut. Sci., 1946, vol. 13, № 12, p. 678.
- 25.17. Shanley F. R. Inelastic column theory. J. Aeronaut. Sci., 1947, vol. 14, № 5, pp. 261—267; русск. перевод: Шенли Ф. Теория колонны за пределом упругости. В сб. Механика. Сб. переводов и обз. ин. период. лит-ры, 1961, № 2 (6), стр. 88—98.

К главе XXVI. Круговая цилиндрическая оболочка

- 26.1. Божинский А. Н., Вольмир А. С. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек за пределами упругости. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 2, стр. 299—301.
- 26.2. Ганиев Н. С. Определение верхней границы критического всестороннего давления короткой цилиндрической оболочки за пределом упругости. Тр. Казанск. хим.-технол. ин-та, 1955, вып. 19—20, стр. 317—324.
- 26.3. Ганиев Н. С. Определение критической нагрузки цилиндрической оболочки за пределом упругости при осевом сжатии и внешнем нормальном давлении. Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1955, вып. 7, стр. 59—75.
- 26.4. Григолюк Э. И. Чисто пластическая потеря устойчивости тонких оболочек. Прикл. матем. и механ., 1957, вып. 21, № 6, стр. 846—849.
- 26.5. Григолюк Э. И. Касательная модульная нагрузка круговых цилиндрических оболочек при комбинированной нагрузке. Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астроном., физ., химия. 1958, № 1, стр. 53—54.
- 26.6. Григолюк Э. И. О сжатии цилиндрической трубы за пределом упругости. Изв. Сибирск. отд. АН СССР, 1960, № 8, стр. 24—28.
- 26.7. Королев В. И., Смирнов И. Г., Соколов В. Н. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки за пределом упругости. Ученые записки МГУ, 1961, вып. 193, стр. 22—41.
- 26.8. Geckeler J. W. Plastisches Knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen an Schalen und Blechen. Z. angew. Math. und Mech., 1928, Bd 28, № 5, SS. 341—352.

- 26.9. Gerard G. Compressive and torsional buckling of thin-wall cylinders in the yield region. NACA, Techn. Note, 1956, № 3726.
- 26.10. Gerard G. Plastic stability of thin shells. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, № 4, pp. 269—274.
- 26.11. Gerard G. Plastic stability theory of thin shells under external pressure. Actes IX Congr. Internat. Mecan. Appl. T. 6. Bruxelles, Bruxelles Univ., 1957, pp. 225—234.
- 26.12. Gerard G. On the role of initial imperfections in plastic buckling of cylinders under axial compression. J. Aerospace Sci., 1962, vol. 29, № 6, pp. 744—745.
- 26.13. Lee L. H. N., Ades C. S. Plastic torsional buckling strength of cylinders including the effects of imperfections. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, No. 4, pp. 241—248, 264.
- 26.14. Lee L. H. N. Inelastic buckling of cylindrical shells under axial compression and internal pressure. Developm. Mech. New York, 1961, pp. 190—202.
- 26.15. Lee H. N. Inelastic buckling of cylindrical shells under axial compression and external pressure. Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Berkeley, Calif., 1962. Vol. 2. Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1962, pp. 989—998.
- 26.16. Lundquist E. E. Strength tests on the thin-walled duralumin cylinders in torsion. NACA, Techn. Rept., 1932, № 427.
- 26.17. Lundquist E. E. Strength tests of thin-walled duralumin cylinders in compression. NACA Rept. 1933, № 473.
- 26.18. Radhakrishnan S. Plastic buckling of cylindrical shells. A teoretical analysis and comparison with test data. Aircraft Engng, 1959, vol. 31, № 370, pp. 365—372.
- 26.19. Robertson A. The strength of tubular struts. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1928, vol. 121, pp. 558—585; Aeronaut. Res. Comm., Repts. and Mem., 1927, № 1185.

К главе XXVII. Нецилиндрические оболочки

- 27.1. Григолюк Э. И. Пластическое выпучивание оболочек вращения. Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, № 2, стр. 130—132.
- 27.2. Григолюк Э. И. Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости тонких оболочек за пределом упругости. В сб. Механика. Упругость и пластичность. 1964 (Итоги науки. ВИНТИ АН СССР). М., 1966, стр. 7—80.
- 27.3. Саченков А. В. Об устойчивости оболочек за пределом упругости. Изв. Казан. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1956. № 10, стр. 81—100.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абир** (Abir D.) 350
Абрахам (Abraham L. H.) 345
Агамиров Р. А. 120, 127, 151, 184—185
Агеев Ю. А. 344
Александр (Alexander J. M.) 127
Александровский С. В. 184
Алексеев С. А. 120, 133
Алумяз Н. А. 159, 333, 342
Алфутон Н. А. 143, 146, 191, 335, 340
Альмрот (Almroth B. O.) 10, 11, 92, 102, 112, 118—120, 124, 125, 127, 128, 130, 144, 167—171, 191—192, 229—230, 241, 266, 337, 338, 341, 343, 348, 351
Амазиго (Amazigo J. C.) 126, 131, 338
Андерсон (Anderson M. S.) 258, 267, 350, 351
Андреев Л. В. 192, 230, 245, 347, 349
Антон (Antona E.) 133, 170, 187, 247, 345
Арбок (Arbocz J.) 132, 338

Бабб (Babb G. W.) 165, 172, 343
Бабкок (Babcock C. D.) 123, 127, 130, 132, 338
Бадрухи Ю. И. 145, 259, 266, 336, 340
Балабух Л. И. 41, 191, 241, 335
Баллерштедт (Ballerstedt W.) 127, 175, 345
Бантлин (Bantlin A.) 192
Барух (Baruch M.) 280, 284, 347, 352
Батдорф (Batdor. S. B.) 127, 158, 160, 165, 172, 187, 335, 342, 343, 345
Бачи (Buchy L. G.) 168
Бекер (Becker H.) 133, 203, 342, 345
Бенджамин (Benjamin R. J.) 133, 168, 170, 195, 343, 346
Беркович (Berkowitz H. M.) 40, 288, 333, 352
Бернс (Burns A. B.) 127
Бнжлар (Bijlaard P. P.) 313, 347, 351
Бицено (Biezeno C. B.) 9, 352
Божинский А. Н. 127, 316, 354
Болдук (Bolduc M. R.) 95, 337
Болотин В. В. 64, 334
Бразье (Brazler L. G.) 192, 346
Брайан (Bryan G. H.) 8, 80, 137, 335, 331
Браун (Brown E. H.) 163, 168, 172—173, 343
Браш (Brush D. O.) 11, 126, 130, 144, 168, 170, 191, 229—230, 341, 343, 348
Бредт (Bredt R.) 156
Бресс (Bresse M.) 8, 137, 139, 181, 341
Бриджет (Bridget F. J.) 163, 175, 188, 345
Броуде Б. М. 174, 221, 337, 344, 347
Брун (Bruhn E. F.) 188, 221, 249, 349
Бубнов И. Г. 50, 79, 80, 83, 336
Будянский (Budiansky B.) 300, 337, 352
Буко (Buko S.) 338
Булгаков Б. В. 147, 340
Бульчев А. А. 206
Бурдин П. Г. 151, 196, 204, 245, 247

Бушнелл (Bushnell D.) 192, 241, 264, 350, 351, 353
Буштырков А. А. 127, 184
Бырсан К. Е. 267, 349

Вагнер (Wagner H.) 127, 175, 345
Валишвили Н. В. 298, 352
Ван (Wan C.) 10, 11, 121, 338
Вейнгартен (Weingarten V. I.) 127, 130, 133, 134, 136, 151, 168, 170—171, 173, 186, 190, 194, 227, 340, 344—347
Вейничке (Weinitsche H. J.) 297, 299, 353
Веллер (Weller T.) 288, 352
Вильсон (Wilson W. M.) 127
Винденбург (Windenbunrg D. F.) 148, 151, 342
Власов В. З. 48, 333—335
Вольмнр А. С. 127, 147, 173, 299, 316, 334, 335, 341, 344, 354
Восселер (Vosseller A. B.) 175, 345
Выборнов В. Г. 341

Габриелли (Gabrielli G.) 133, 170, 187, 247, 345
Галлахер (Gallagher R. H.) 347
Галеркин Б. Г. 79, 80, 336
Галимов К. З. 40, 42, 43, 45, 49, 176, 333
Галкин С. И. 340
Ганиев Н. С. 327, 354
Гантмахер Ф. Р. 336
Гаррис (Harris L. A.) 127, 133, 163, 168—170, 173, 188—190, 195, 267, 343, 345, 346, 350
Гейзенблази Р. Е. 337
Геккелер (Geckeler J.) 354
Геммерлинг А. В. 127, 337
Генки (Hencky H.) 303, 354
Годунов С. К. 336
Гольденвейзер А. Л. 333, 334
Гопкинс (Hopkins H. G.) 163, 172—173, 343
Гори (Goree W. S.) 127
Грасгоф (Grashof F.) 8, 137, 139, 181, 341
Грибанов В. Ф. 270, 350
Григолюк Э. И. 8, 14, 126, 194, 274—275, 285, 298—299, 310—311, 313—314, 318, 323, 329—332, 335, 351—355
Гришак В. З. 186, 344
Гусев Б. М. 341

Даниельсон (Danielson D.) 103, 104, 340
Даревский В. М. 64, 158, 172—173, 188—189, 202, 206, 333—335, 343, 344, 349
Девис (Devis R. M.) 95, 337
Джерар (Gerard G.) 127, 133, 203, 318, 320, 322, 332, 342, 345, 354

Джером (Jerome C. C.) 175, 345
 Джонс (Johns D. J.) 120, 134, 171, 260, 344, 348, 351
 Джоис (Jones R. M.) 120, 339
 Дим (Dym C. L.) 124, 338
 Добряков А. А. 203—206, 346
 Доннелл (Donnell L. H.) 9, 10, 11, 64, 101, 120, 121, 127, 133, 147, 158, 162—163, 187, 195—196, 317, 334, 338, 341, 342, 345
 Доу (Dow M. B.) 127, 168
 Дубяга К. М. 192, 346

Занден (Sanden K.) 144, 335
 Зволинский Н. В. 88, 336, 344
 Зехлер (Sechler E. E.) 123, 127, 130, 168—170, 338, 343, 345
 Зингер (Singer J.) 280, 284, 288, 352
 Зоффи (Zophree W.) 184, 345
 Зубчанинов В. Г. 127
 Зюзин В. А. 344

Иванов В. С. 147, 341
 Ильгамов М. А. 205, 346
 Ильюшин А. А. 303, 327, 353
 Импернал (Imperial E. F.) 195—196, 346
 Иосимура (Yoshimura Y.) 343
 Исанбаева Ф. С. 146, 147, 341
 Исправников Л. Р. 127, 151, 163, 168, 170, 184—185, 188

Кабаиов В. В. 8, 14, 82, 88, 92, 95, 112, 118, 126, 133, 174, 186, 192, 194, 196, 203—204, 206, 212, 225, 245—247, 255, 258—259, 263, 266—267, 269—270, 294, 326, 334—337, 343, 344, 347, 349, 353

Кан С. Н. 123, 267, 337, 349
 Канемитцу (Kanemitsu S.) 126, 127, 133, 136, 339
 Као (Kao R.) 353
 Каплан (Kaplan A.) 184—185, 345
 Карман (Karman T. L.) 9, 120, 127, 192, 339, 346

Касвелл (Caswell R. D.) 13, 131, 340
 Кемпнер (Kempner J.) 120, 335, 341
 Кильчевский Н. А. II, 101, 337
 Кириан (Kiernan T. Y.) 297, 299, 353
 Кирсте (Kirste L.) 121
 Кирхгофф (Kirchoff G.) 35—36
 Кларк (Clark J.) 127
 Клейн (Klein B.) 349
 Кливвер (Cleaver P. C.) 148, 151—153, 341
 Кога (Koga T.) 297, 353
 Кодاما (Kodama S.) 102, 104, 160, 339, 343
 Коен (Cohen G. A.) 338, 351
 Кожевников А. А. II
 Кожевников В. II, 102, 338, 351
 Койтер (Koiter W. T.) 121, 123—125, 131, 333, 339

Коновалов Ю. В. 192, 346
 Конох В. II, 344
 Корман (Corman D.) II, 338
 Королев В. II, 327, 354
 Королева Е. М. 241, 348
 Коц В. М. 131, 337
 Коши (Cauchy A.) 36
 Крейт (Crate N. S.) 127, 165, 168—169, 172, 189, 343, 344

Кренцке (Krenzke M. A.) 297, 299, 353
 Кривошеев Н. II, 161—162, 172, 188—189, 342, 344
 Кроуфорд (Crawford R. E.) 127

Кубо (Kubo K.) 162, 343
 Кудинов А. Н. 348
 Кузнецов В. К. 126, 337
 Кукуджанов С. Н. 88, 239, 336, 348
 Кулаков В. М. 196, 221, 346, 347
 Курцевич Г. II, 212, 347
 Куршин Л. М. 130, 260, 338, 350
 Кшнякии Р. II, 188, 206, 344

Легрет (Legget D. M. A.) 120
 Лейбензон Л. С. 290, 352
 Ленько О. Н. 184
 Ли (Lee L. H.) 317, 324, 327—328, 355
 Лиел (Lyeil J.) 334
 Лилли (Lilly W. E.) 8, 98, 126, 339
 Липовский Д. Е. 123, 131, 337
 Липовцев Ю. В. 82, 95, 97, 126, 192, 240, 242—244, 274—275, 336, 338, 348, 349—351
 Ло (Lo H.) 127, 168—169, 344
 Лоренц (Lorenz R.) 8, 99, 101, 186, 192, 339
 Лу (Loo T. T.) 64, 122, 161, 335, 342, 353
 Лу (Lu S. Y.) 218, 339, 346, 348
 Лукашевич (Lukasiewicz S.) 334
 Лундквист (Lundquist E. E.) 101, 127, 162—163, 195—196, 203, 342, 346, 347, 349, 355
 Ляв (Love A. E. H.) 36, 41, 114, 333
 Ляпунов А. М. 52, 334

Мадсен (Madsen W. A.) 10, 119, 120, 122, 124, 263—264, 339, 350
 Маккалден (MacCalden P. B.) 288, 352
 Макеев Е. М. 347
 Маллок А. (Mallock A.) 8, 98, 125, 126, 339
 Мальцев В. П. 284, 285, 351, 352
 Мамай В. II, 298, 352
 Маневич Л. II, 186, 195—196, 218, 222, 344, 346, 347
 Маргерр (Marguerre K.) 9, 334
 Марченко В. М. 241
 Марчук Г. II, 336
 Марьин В. А. 158, 163, 172—173, 343
 Маттиисен (Matthiesen R. B.) 288, 352
 Майерс (Mayers J.) 10, 119, 120, 263—264, 339, 351

Мек (Meck H. R.) 144
 Месколл (Mescall J.) 298—299, 353
 Мизес (Mises R.) 137, 342
 Минеев В. Е. 154
 Михайлов В. В. 147, 341
 Михельсон (Michielson N. F.) 120
 Морган (Morgan E. J.) 130, 131, 133, 134, 136, 170—171, 184, 340, 344, 345
 Морли (Morley L. S. D.) 335
 Моссаковский В. II, 337, 344, 347
 Моссман (Mossman R. W.) 195—196, 346
 Мур (Moore R. L.) 127
 Муравницкий В. II, 348
 Мүштани Х. М. 40, 42, 43, 45, 49, 111, 123, 147, 157, 175—176, 223, 277, 288, 333, 334, 342, 344, 348, 352
 Мюгернджи (Muggeridge D. B.) 13, 125, 126, 130, 131, 339, 340
 Мяченко В. II, 143, 174, 227, 241, 257, 291, 336, 341, 349—352

Навье (Navier L. C. M.) 9
 Нагаев В. А. 146, 151, 154, 341
 Назаров А. А. 334
 Нардо (Nardo S. V.) 350

Нарасимхан (Narasimhan K. J.) 125, 339
 Нахбар (Nachbar W.) 102, 118, 339
 Нинсав (Niisawa J.) 343
 Никулинская С. Н. 337
 Новожилов В. В. 28, 40, 41, 333, 334
 Нонима (Nofima N. M.) 126, 127, 133, 136, 339
 Норден А. П. 333
 Нэш (Nash W. A.) 146, 147, 151, 161, 163, 218, 339, 342, 343, 346

Ободан Н. И. 230, 347
 Огибалов П. М. 270, 350
 Охира (Ohira H.) 11, 101, 339, 340

Пагсли (Pugsley A.) 127
 Палий О. М. 144
 Папкович П. Ф. 81, 137—139, 152, 174—175, 178, 186, 341, 344, 345
 Пахомова Л. А. 241, 257—258, 349, 350
 Перрон (Perrone N.) 353
 Петерсон (Peterson J. P.) 127, 168, 196
 Плетникова Е. Д. 346
 Погорелов А. В. 121, 130, 131, 146, 148, 158, 162, 335
 Прайд (Pride R. A.) 267, 351
 Прандтль (Prandtl L.) 354
 Присекин В. Л. 130, 338
 Прохоров С. В. 111, 223, 348
 Пфлюгер (Pflüger A.) 340

Работнов Ю. Н. 329, 333, 335
 Радковский (Radkowski P. P.) 95, 337
 Радхакришнан (Radhakrishnan S.) 163, 322, 327, 355
 Рашиевский П. К. 333
 Рейнольдс (Reynolds T. E.) 144
 Рейсс (Reiss A.) 354
 Рейсснер (Reissner E.) 193, 299, 346, 353
 Релей (Rayleigh J. W. S.) 79, 81, 82, 337
 Рефилд (Rehfield L. W.) 10, 11, 102, 338, 339
 Ри (Rea R. H.) 168
 Ритц (Ritz W.) 79, 80, 81, 82, 337
 Робертсон (Robertson A.) 127, 317, 355
 Робинзон (Robinson R. G.) 346
 Родителей К. А. 127
 Росс (Ross C. T.) 254, 263—264, 351
 Роуд (Rhode R. V.) 349
 Рэдшоу (Redshaw S. C.) 151
 Рябенский В. С. 336

Сандерс (Sanders J. L.) 64, 334
 Саутуэлл (Southwell R. W.) 8, 100, 137—139, 148, 152, 178, 186, 342
 Сахаров Б. А. 206
 Саченов А. В. 121, 143, 162, 175—176, 332, 336, 341, 344, 352, 355
 Сейд (Seide P.) 130, 133, 134, 136, 170—171, 186, 194, 283, 285, 288, 340, 344—346, 352
 Серпико (Serpico J. C.) 348
 Сецава (Sezawa K.) 162, 343
 Симмондс (Simmonds J. G.) 103, 104, 340
 Скин (Skene W. T.) 133, 168, 170, 190, 195, 343, 345, 346
 Смелый Г. Н. 344
 Смирнов И. Г. 327, 354
 Смит (Smith S.) 264, 350

Собей (Sobey A.) 10, 119, 120, 122, 340
 Соколов В. Н. 327, 354
 Соколов В. Ф. 146, 340
 Сорокин В. В. 308, 353
 Сотников Д. И. 337
 Соубл (Sobel L. H.) 143, 342
 Сунг (Soong T. C.) 102, 339
 Сьюэр (Suer H. S.) 133, 169—170, 188, 189, 195—196, 343—346

Тенерелли (Tenerelli D. J.) 221, 347
 Теннисон (Tennyson R. C.) 13, 125, 126, 130, 131, 339, 340
 Тербушко О. И. 146, 152, 158, 176, 184, 188—190, 345
 Терстон (Thurston G. A.) 299, 353
 Тзао (Tsao S. H.) 40, 334
 Тилеманн (Thielemann W.) 10, 13, 102, 119, 127—129, 134, 146, 147, 150, 151, 168, 169, 340, 342, 344
 Тимошенко С. П. 8, 9, 79, 81, 91, 100, 101, 175, 186, 302, 335, 336, 338
 Толоконников Л. А. 354
 Тольке (Tölke F.) 144, 335
 Триллинг (Trilling C.) 148, 151, 342
 Трофимов В. В. 348

Утешев В. С. 336

Фаддеев Д. К. 86, 337
 Фаддеева В. Н. 88, 337
 Фельд (Field F. A.) 229, 348
 Фэйрбейрн (Fairbairn W.) 8, 12, 137, 148, 341
 Фиников С. П. 333
 Фитцгibbon (Fitzgibbon D. P.) 127
 Фишер (Fischer G.) 111, 114, 127, 167—168, 170, 191, 343
 Флюгге (Flügge W.) 64, 101, 121, 123, 127, 160, 175, 191, 194, 335
 Фролов А. Н. 285, 351, 352
 Фурье (Fourier M.) 77, 337
 Фын (Fung Y. C.) 127, 168—170, 343, 345

Хаймен (Hyman B.) 277, 351
 Харари (Harari O.) 280, 284, 347, 352
 Хатчинсон (Huichinson J. W.) 125, 126, 131, 297, 300, 339, 353
 Хвалла (Chwalla E.) 192, 346
 Холл (Hall J. B.) 267, 351
 Холмс (Holmes A. M. C.) 11, 126, 130, 168
 Хортон (Horton W. H.) 221, 254, 263, 347, 351
 Хофф (Hoff N. J.) 10, 11, 102, 119, 120, 122—124, 125, 223, 225, 253—254, 263—264, 297, 335, 338, 339, 348, 350, 351, 353
 Ху (Hu P.) 337
 Хуан (Huang N. C.) 95, 192, 274, 299, 337, 353
 Хэйли (Healey J.) 277, 351

Цзян (Tsien H. S.) 9, 120, 339
 Циглер (Ziegler H.) 53, 335
 Цолли (Zoelly R.) 290, 353

- Ченг (Cheng H. S.) 353
Чень (Chien W. Z.) 333
Черных К. Ф. 334
Чернышев Г. Н. 351
Четаев Н. Г. 52, 335
Чжао (Chao C. C.) 263—264, 350
- Шаповалов Л. А. 253, 350
Шварц (Schwartz E. B.) 127, 168—169, 344
Шварц Э. Б. 242—244, 348, 349
Шверин (Schwerin E.) 155, 343
Шевляков Ю. А. 195, 346
Шенли (Shanley F. R.) 303, 354
Шильдкроут (Schildcrout M.) 187, 342
Шкутин Л. И. 95, 333, 337, 352
Штаерман И. Я. 280, 352
Штейн (Stein M.) 167—168, 187, 342, 344, 345
Штурм (Sturm R. G.) 151, 160, 343
- Эбнер (Ebner H.) 151
Эван-Ивановский (Evan-Ivanowski R. M.) 11, 300, 338, 353
Эвенсен (Evensen D. A.) 126, 148, 165, 337
Эйдс (Ades C. S.) 324, 355
Эйлер (Eulero L.) 8, 335
Экстрем (Ekström R. E.) 151, 163, 165, 189, 345
Энгессер (Engesser F.) 301—302, 354
Эсслингер (Esslinger M. E.) 10, 102, 119, 128, 129, 134, 147, 340, 342
- Ю (Yu Y. Y.) 335
- Яворский (Jaworski A.) 263—264, 351
Ямаки (Jamaki N.) 102, 104, 144, 159—160, 239, 339, 341, 343
Яо (Yao J. C.) 193, 275, 346, 351
Ясин Э. М. 241, 349

**Эдуард Иванович Григолюк,
Виктор Васильевич Кабанов**

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

М., 1978 г., 360 стр. с илл.

Редактор Л. Г. Корнейчук
Технический редактор В. Н. Кондакова
Корректоры О. А. Бутусова, Н. Д. Дорохова
ИБ № 11356

Сдано в набор 08.12.77. Подписано к печати 22.04.78. Т-08080.
Бумага 60×90/16, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая
печать. Условн. печ. л. 29,5. Уч.-изд. л. 22,71. Тираж 4500 экз.
Заказ № 1040 Цена книги 2 р. 50 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71. Ленинский проспект, 15

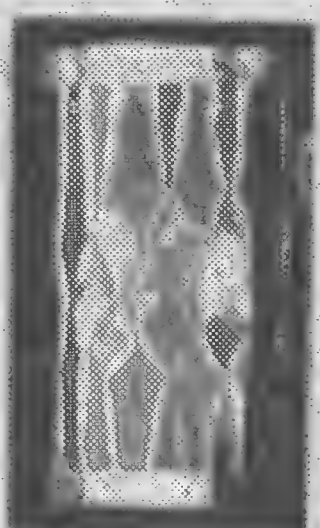
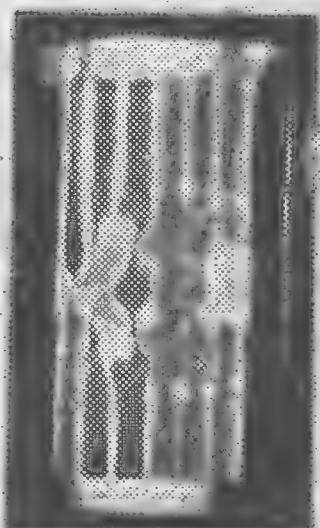
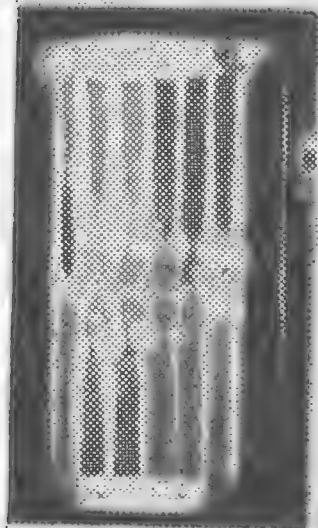
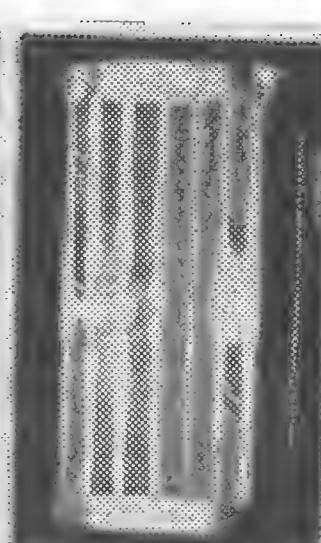
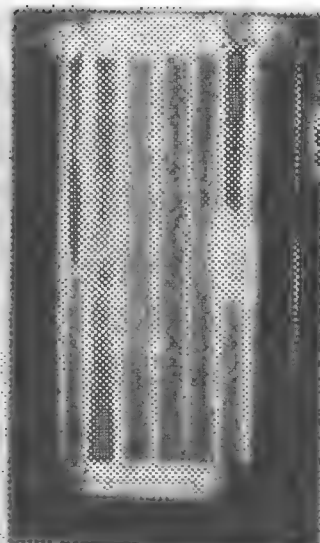
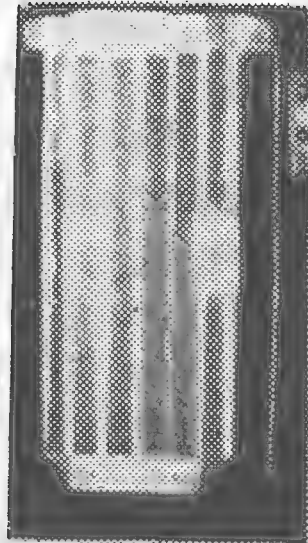
Набрано и сматрицировано в ордена
Трудового Красного Знамени
Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52,
Измайловский проспект 29.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 4
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли, 196126, Ленинград,
Ф-126, Социалистическая ул., 14.

Убедительная просьба

по поводу чтения и разматривания
книги, эстампы, фотографии и т. д.

- 1) Книжки не подшивать, раскрашивать и страницы не деформировать;
- 2) при переписывании страниц пальцы не мочить;
- 3) переписывать медленно и аккуратно, чтобы нечаянно углы страниц и краев старых рисунков не загнулись и не смялись, а также прокладку из газетной бумаги между рисунками не испортить;
- 4) при разматывании эстампов, фотографий и рисунков в альбоме не курить и табачным дымом их не обжигать;
- 5) перед тем как раскрывать и читать книгу, тщательно мыть потными руками, чтобы отсюда не брать;
- 6) из самолета рисунки на эстампах, фотографии и т. д. пальцами не прикасаться;
- 7) Обложку или переплет книги не перегибать, не обертывать в бумагу;
- 8) листы книги для печати не загибать;
- 9) в карманах книги не носить или не употреблять при этом особо предостереженности, чтобы книги не испачкались и не испортились.



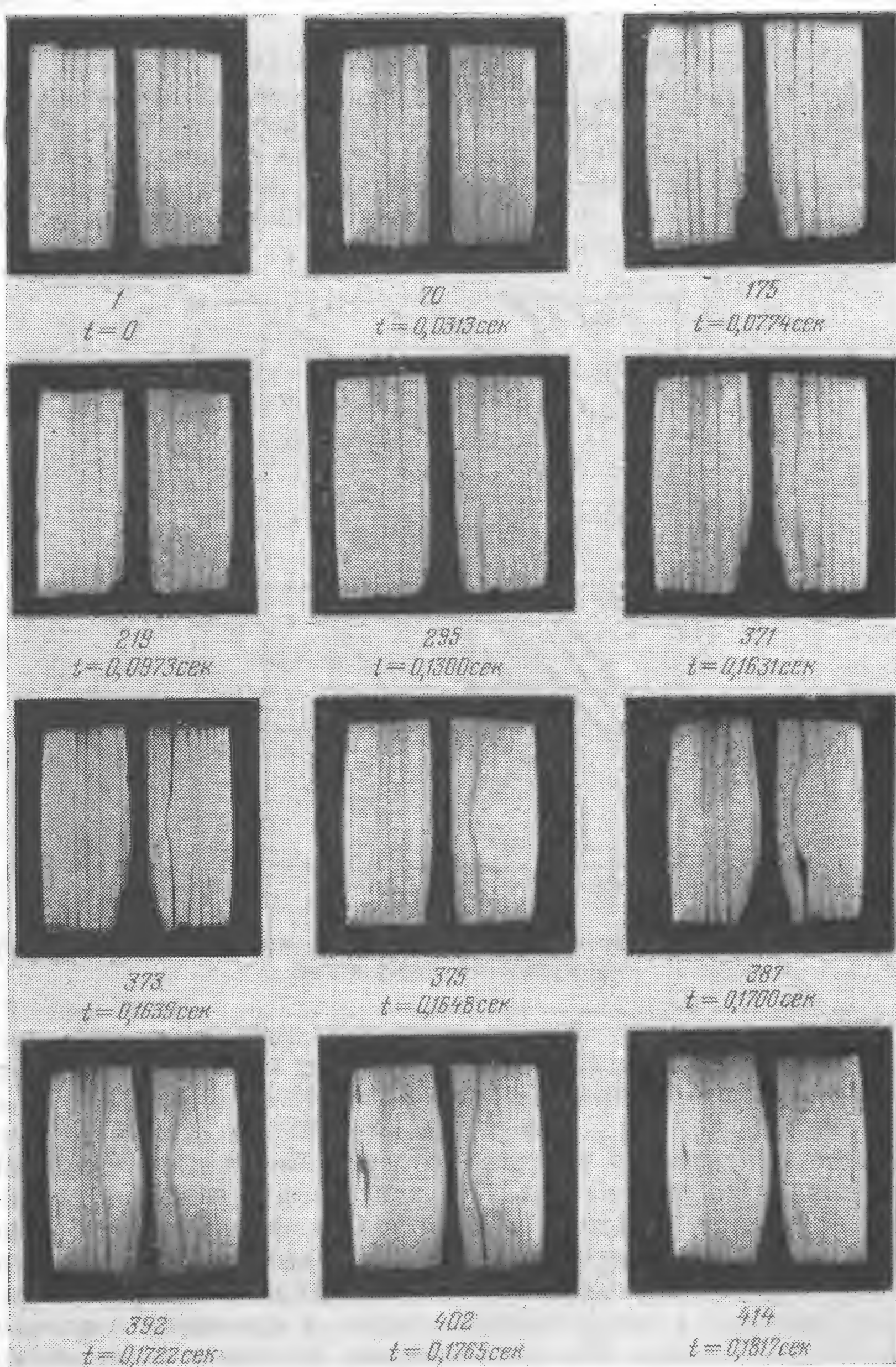


Рис. 8.9. Кадры скоростной съемки процесса потери устойчивости оболочки при внешнем давлении. Числа означают номера кадров.

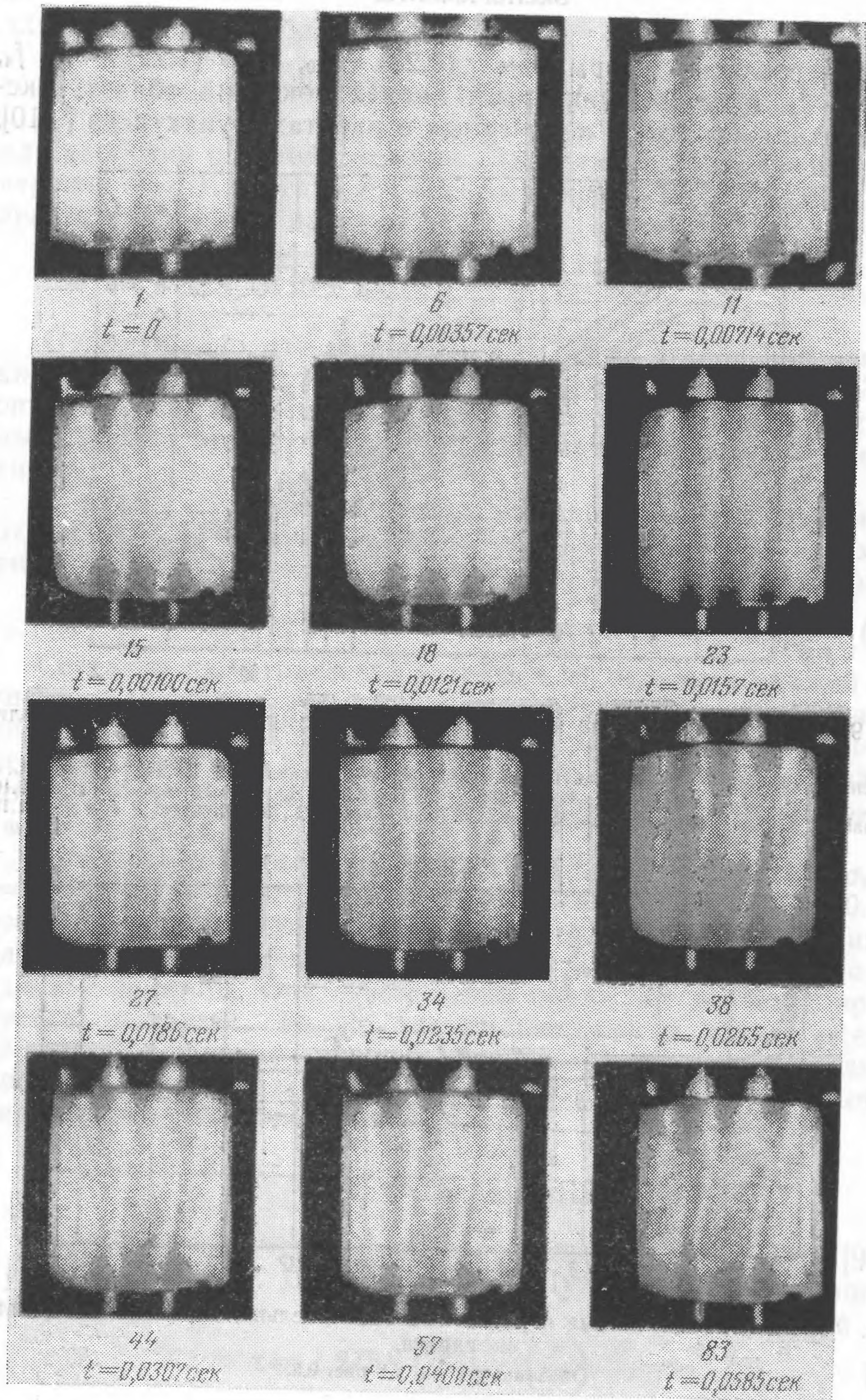


Рис. 9.7. Кадры скоростной киносъемки процесса потери устойчивости оболочки при кручении.

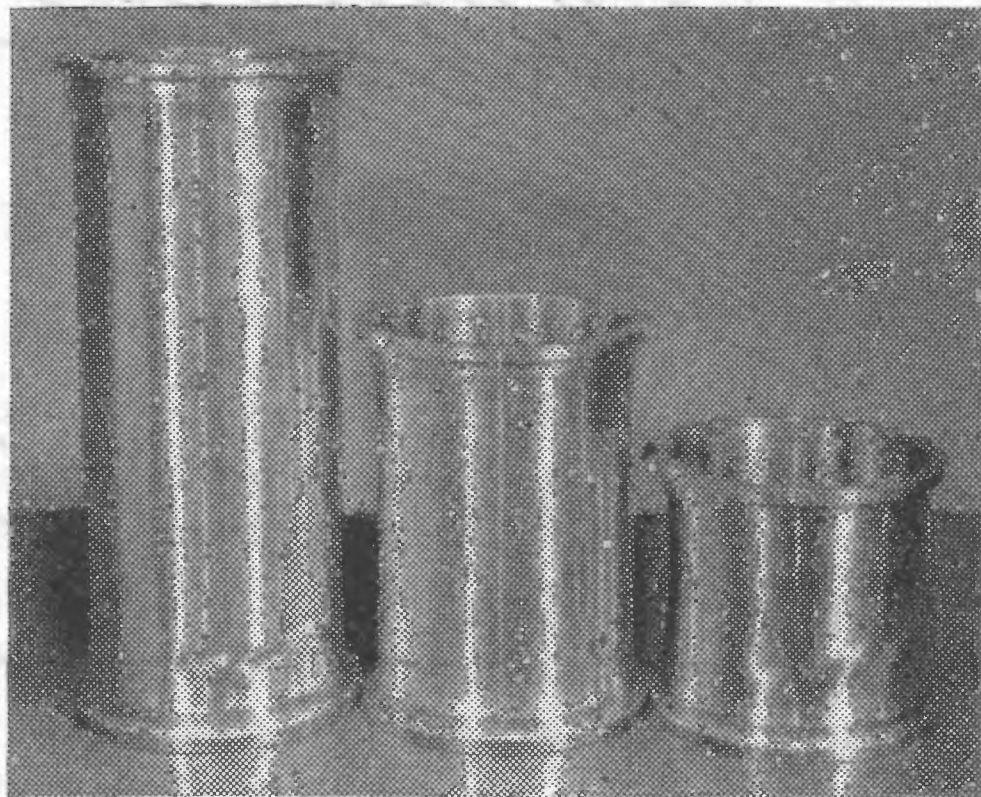


Рис. 13.4. Формы потери устойчивости оболочек при изгибе силой.

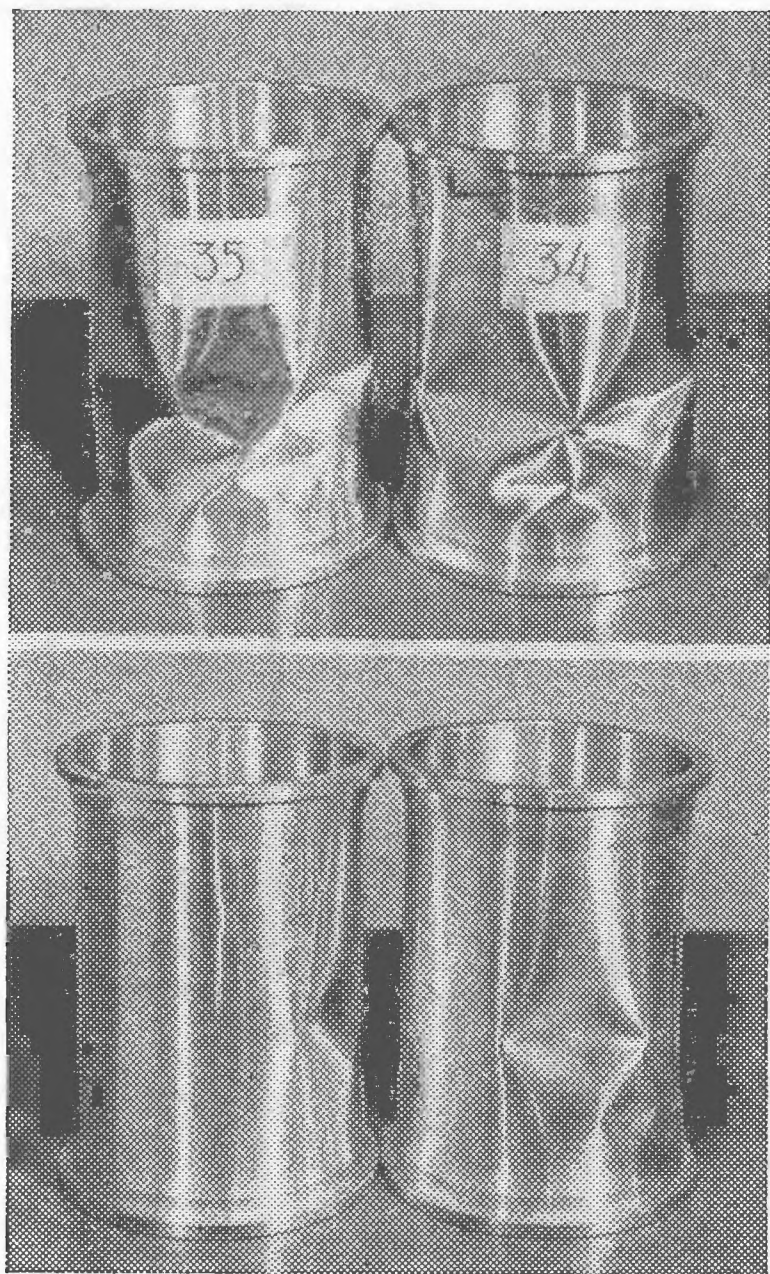


Рис. 20.7. Форма потери устойчивости оболочек при изгибе моментом и внешнем давлении.

Соответственно векторы от усилий на противоположных площадках:

$$-(\tilde{G}_1 + \tilde{G}_{1\alpha} da), \quad -(\tilde{G}_2 + \tilde{G}_{2\beta} d\beta). \quad (2.7)$$

Векторы момента поверхностной нагрузки

$$\tilde{m} = (\tilde{r} \times q) A_1 B_1 da d\beta = \tilde{r} \times \tilde{q}. \quad (2.8)$$

Равенство нулю главного момента дает второе уравнение равновесия элемента

$$\tilde{G}_{1\alpha} da + \tilde{G}_{2\beta} d\beta - \tilde{m} = 0. \quad (2.9)$$

Преобразуем это уравнение

$$(G_1 + \tilde{r} \times \tilde{R}_1)_\alpha da + (G_2 + \tilde{r} \times \tilde{R}_2)_\beta d\beta = (G_{1\alpha} + \tilde{r}_\alpha \times \tilde{R}_1) da + \\ + (G_{2\beta} + \tilde{r}_\beta \times \tilde{R}_2) d\beta + [(\tilde{r} \times \tilde{R}_{1\alpha}) da + (\tilde{r} \times \tilde{R}_{2\beta}) d\beta - \tilde{r} \times \tilde{q}] = 0.$$

Выражение в квадратной скобке равно нулю согласно первому уравнению равновесия. В результате получаем

$$(G_{1\alpha} + \tilde{r}_\alpha \times \tilde{R}_1) da + (G_{2\beta} + \tilde{r}_\beta \times \tilde{R}_2) d\beta = 0. \quad (2.10)$$

Векторные уравнения (2.4), (2.10) эквивалентны шести скалярным уравнениям. Используя деривационные формулы (4.31) и формулы векторных произведений ортов (4.33) гл. I, получаем, приравнявая выражения при ортах $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_n$, уравнения равновесия, отнесенные к деформированному состоянию оболочки:

$$(B_1 T_1)_\alpha + (A_1 S_2)_\beta - [B_{1\alpha} - (A\gamma)_\beta] T_2 + A_\beta T_1 \gamma + S_1 (A_{1\beta} - B_\alpha \gamma) - \\ - S_2 B_\alpha \gamma - AB_1 (k_1 + \chi_1) Q_1 - BA (\tau - k_2 \gamma) Q_2 + A_1 B_1 q_1 = 0, \\ (A_1 T_2)_\beta + (B_1 S_1)_\alpha - [A_{1\beta} - (B\gamma)_\alpha] T_1 + B_\alpha T_2 \gamma + S_2 (B_{1\alpha} - A_\beta \gamma) - \\ - S_1 A_\beta \gamma - BA_1 (k_2 + \chi_2) Q_2 - AB (\tau - k_1 \gamma) Q_1 + A_1 B_1 q_2 = 0, \\ (B_1 Q_1)_\alpha + (A_1 Q_2)_\beta + A_1 B (k_2 + \chi_2) T_2 + B_1 A (k_1 + \chi_1) T_1 + \\ + AB (S_1 + S_2) \tau + A_1 B_1 q = 0, \quad (2.11) \\ (A_1 M_2)_\beta + (B_1 H_1)_\alpha - A_1 B_1 Q_2 + H_2 [B_{1\alpha} - (A\gamma)_\beta] + \\ + A_\beta H_1 \gamma - M_2 B_\alpha \gamma - M_1 [A_{1\beta} - B_\alpha \gamma] - AB Q_1 \gamma = 0, \\ (B_1 M_1)_\alpha + (A_1 H_2)_\beta - A_1 B_1 Q_1 + H_1 [A_{1\beta} - (B\gamma)_\alpha] + \\ + B_\alpha H_2 \gamma - M_1 A_\beta \gamma - M_2 (B_{1\alpha} - A_\beta \gamma) - AB Q_2 \gamma = 0, \\ (S_1 - S_2) (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + H_2 (k_2 + \chi_2 + k_2 \varepsilon_1) - H_1 (k_1 + \chi_1 + k_1 \varepsilon_2) - \\ - G_2 \tau + G_1 \tau = 0.$$

Если при раскрытии уравнений (2.4), (2.10) выразить орты $\tilde{e}_i$ деформированной системы через орты e_i недеформированной